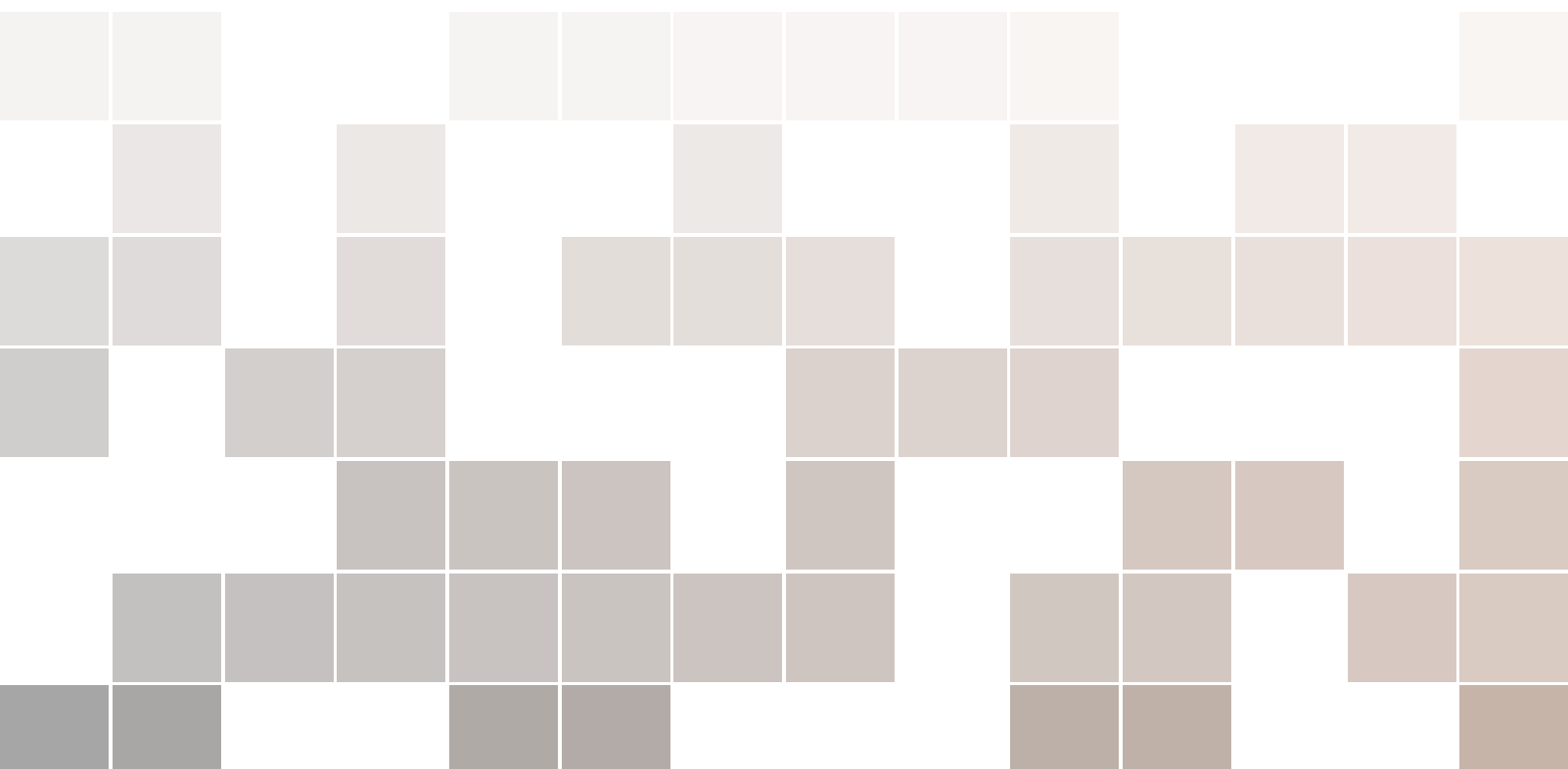


# Primi Passi nell'Aritmetica dell'Infinito

un nuovo modo di contare e misurare

**Davide Rizza**

University of East Anglia





# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b> .....	<b>5</b>
1.1	Scopo del testo	5
1.2	Modalità d'uso	6
1.3	Oltre i primi passi	7
1.4	Suggerimenti e commenti	8
<b>2</b>	<b>Aritmetica con l'unità infinita ①</b> .....	<b>9</b>
2.1	Riserve numerali e sistemi numerali	9
2.2	Numeri naturali	12
2.3	Un nuovo sistema numerale	15
2.3.1	Notazione in base ① .....	17
2.4	Numeri interi	18
2.5	Misure	20
2.5.1	Numeri pari e dispari .....	24
2.6	Frazioni	26
2.7	Osservazioni conclusive	30
<b>3</b>	<b>Successioni e Serie</b> .....	<b>33</b>
3.1	Successioni infinite	33
3.1.1	Successioni complete di caselle .....	37
3.2	Serie Infinite	40
3.2.1	Serie Aritmetiche .....	42
3.2.2	Serie con Infinitesimi .....	47
3.2.3	Serie Geometriche .....	49
3.3	Aritmetica delle Serie Infinite	53

<b>4</b>	<b>Come usare il resto di questo opuscolo</b> .....	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>Scheda A: l'hotel di Hilbert</b> .....	<b>63</b>
5.1	Contare $\mathbb{N}$	63
5.2	Contare suddivisioni di $\mathbb{N}$	64
5.3	L'hotel di Hilbert con un nuovo ospite	65
5.4	L'hotel di Hilbert con infiniti nuovi ospiti	66
<b>6</b>	<b>Scheda B: la lampada di Thomson</b> .....	<b>69</b>
6.1	Contare $\mathbb{N}$	69
6.2	Sommare le potenze di $1/2$	70
6.3	Numeri pari e dispari	71
6.4	La lampada di Thomson	72
<b>7</b>	<b>Scheda C: il cubo di Arsenjevic</b> .....	<b>75</b>
7.1	Contare $\mathbb{N}$	75
7.2	Sommare le potenze di $1/2$	76
7.3	Contare suddivisioni di $\mathbb{N}$	77
7.4	Il cubo di Arsenjevic	78
<b>8</b>	<b>Scheda D: il paradosso di Ross</b> .....	<b>83</b>
8.1	Contare $\mathbb{N}$	83
8.2	Contare suddivisioni di $\mathbb{N}$	84
8.3	Il paradosso di Ross	86
<b>9</b>	<b>Scheda E: decisioni infinite</b> .....	<b>89</b>
9.1	Contare $\mathbb{N}$	89
9.2	Sommare le potenze di $1/2$	90
9.3	Contare suddivisioni di $\mathbb{N}$	91
9.4	Il paradosso di Machina	92
9.5	Il paradosso di Yablo	94
9.6	Una lotteria infinita	95
<b>10</b>	<b>Scheda F: paradossi fisici</b> .....	<b>99</b>
10.1	Contare $\mathbb{N}$	99
10.2	Sommare le potenze di $1/2$	100
10.3	Energia cinetica	101
10.4	Creazione dal nulla	103

# 1. Introduzione

## 1.1 Scopo del testo

Le pagine seguenti si propongono di motivare ed illustrare, ad uso di studenti ed insegnanti di scuola media superiore, un'affascinante estensione all'infinitamente grande e all'infinitamente piccolo della pratica di contare e calcolare. Si tratta dell'Aritmetica dell'Infinito ideata da [Yaroslav Sergeyev](http://www.info.deis.unical.it/yaro/)<sup>1</sup> nel 2003 e progressivamente articolata in [25, 26, 27, 28, 32]. La sua crescente importanza nella matematica contemporanea sta emergendo proprio in questi anni in ambiti molto vari come l'analisi numerica (per esempio [1, 17, 31]), la ricerca operativa (di recente in [8, 9]), la teoria della computabilità (in particolare [29, 30]), lo studio degli automi cellulari (ad esempio [6, 7]) e la teoria della probabilità (si vedano specialmente [23, 24]).

L'Aritmetica dell'Infinito propone un punto di vista nuovo sui concetti di numero e di calcolo, che tuttavia può essere applicato a problemi già noti e studiati, dando origine sia a risultati nuovi che a raffinamenti di risultati noti. Quanto ai suoi concetti di base, l'Aritmetica dell'Infinito può essere resa facilmente accessibile agli studenti e permette loro di sperimentare sia l'adozione di un nuovo punto di vista matematico su problemi già noti, sia la sua applicazione a problemi nuovi ma pur sempre adeguati all'ampiezza della loro conoscenza ed esperienza matematica.

---

<sup>1</sup><http://www.info.deis.unical.it/yaro/>.

Apprendere l’Aritmetica dell’Infinito vuol dire imparare a percepire la matematica come uno sforzo creativo continuamente orientato alla costruzione di idee nuove e inattese. Alla immediata – e, fra gli studenti, più comune – percezione della matematica come un meccanismo ferreo che fissa risposte indiscutibili a problemi dati viene a sostituirsi la percezione più sofisticata e più realistica della matematica come uno strumento plastico che può essere modificato e adattato alla natura dei problemi che ci si presentano.

Non è di norma facile riuscire a cogliere la matematica sotto questo punto di vista, che è tuttavia l’unico capace di porre in luce il suo grande valore intellettuale e culturale. Le idee di Yaroslav Sergeyev offrono con sorprendente agio un modo di perseguire questo obiettivo. Chi scrive lo ha potuto sperimentare in numerosi contesti scolastici, sia in Italia che nel Regno Unito (le esperienze compiute e i commenti di studenti ed insegnanti si possono consultare sul sito [www.numericalinfinities.com](http://www.numericalinfinities.com)), da cui è stato fra l’altro possibile trarre risultati di interesse per la didattica della matematica (si veda [10]). L’esigenza di rendere più ampiamente disponibili i materiali utilizzati nel lavoro scolastico compiuto fino ad oggi, in modo che essi possano essere liberamente ed autonomamente adottati da tutti coloro che desiderino intraprendere con i propri studenti un percorso didattico innovativo, sorprendente e gratificante, sta alla base delle pagine che seguono.

## 1.2 Modalità d’uso

Questo opuscolo è diviso in due parti. La prima introduce un calcolo aritmetico con numeri infinitamente grandi e piccoli (Capitolo 2) per poi applicarlo (Capitolo 3) a successioni e serie infinite, mentre la seconda (Schede A – F) consta di schede didattiche fra loro indipendenti, ciascuna delle quali è dedicata all’esplorazione per esercizi di uno specifico paradosso dell’infinito. Ogni scheda è strutturata in modo che possa essere affrontata senza avere letto la prima parte dell’opuscolo.

In un contesto didattico, è possibile fare uso del materiale proposto in almeno tre modi, qui descritti in riferimento alle possibili esigenze dell’insegnante:

- **Modalità 1:** l’insegnante può studiare i capitoli 2 e 3 dell’opuscolo insieme agli studenti, seguendo gli esercizi proposti. Lo studio dell’opuscolo può interrompersi qui, oppure l’insegnante può proporre agli

studenti, quale lavoro autonomo, una o più schede tratte dalla seconda parte. Si può organizzare tale lavoro in molti modi. Eccone due:

- è possibile dividere la classe in gruppi ed assegnare ad ogni gruppo una scheda distinta, che i suoi membri avranno il compito di elaborare e presentare al resto della classe;
  - è possibile dividere la classe in gruppi ed assegnare la medesima scheda ad ogni gruppo, che ha l'incarico di elaborarla. Le risultanti elaborazioni verranno poi condivise nel corso di una discussione aperta da svolgersi in classe.
- **Modalità 2:** l'insegnante può studiare individualmente i Capitoli 2 e 3, per impadronirsi dell'Aritmetica dell'Infinito e, in seguito, organizzare laboratori su uno o più paradossi dell'infinito, mettendo a disposizione dei propri studenti soltanto le schede relative ai paradossi scelti. Ciascuna scheda è strutturata in modo tale da contenere tutte le informazioni necessarie alla sua elaborazione. Gli studenti possono farne uso senza possedere conoscenze pregresse. L'insegnante può guidarli in questo percorso, qualora incontrino particolari difficoltà, sulla scorta delle conoscenze acquisite studiando i Capitoli 2 e 3.
  - **Modalità 3:** l'insegnante può organizzare attività di classe strutturate a sua discrezione, su uno o più paradossi dell'infinito, preparandosi semplicemente sulle schede prescelte. In caso di dubbi o incertezze, l'insegnante potrà consultare i Capitoli 2 e 3 dell'opuscolo.

Le soluzioni agli esercizi proposti fanno parte di un'appendice separata dall'opuscolo, di cui gli insegnanti possono richiedere una copia elettronica all'autore, contattandolo all'indirizzo di posta elettronica [d.rizza@uea.ac.uk](mailto:d.rizza@uea.ac.uk).

### 1.3 Oltre i primi passi

Chi abbia letto questo opuscolo potrebbe voler approfondire ulteriormente le idee che vi sono esposte. A questo scopo, vale la pena segnalare sia il libro di Yaroslav Sergeyev *Arithmetic of Infinity* (2003, Kindle Edition 2013) che l'articolo seguente<sup>2</sup>: Sergeyev Ya.D. (2015) 'Un semplice modo per trattare le grandezze infinite ed infinitesime', *La Matematica nella Società e nella Cultura: Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Serie I, Vol.8, 111–147. Lo stesso sito contiene una lista completa dei lavori pubblicati fino ad oggi sull'Aritmetica dell'Infinito e le sue applicazioni. Se ne possono indicare due in inglese, accessibili al lettore non specialista:

<sup>2</sup>Scaricabile da <http://theinfinitycomputer.com/arithmic.html>

- Rizza, D. (2018) ‘A study of mathematical determination through Bertrand’s paradox’, *Philosophia Mathematica* 26, pp.375–395.
- Sergeyev Ya.D. (2016), ‘The exact (up to infinitesimals) infinite perimeter of the Koch snowflake and its finite area’, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 31, 21–29.

Un’ampia e aggiornata panoramica sugli sviluppi dell’Aritmetica dell’Infinito si trova in:

- Sergeyev, Ya. D. (2017) ‘Numerical infinities and infinitesimals: Methodology, applications, and repercussions on two Hilbert problems’, *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, 4, 219–320.

#### 1.4 Suggerimenti e commenti

Questo opuscolo non ha carattere definitivo. La sua versione attuale sorge dall’esperienza acquisita attraverso il lavoro con circa duecento studenti. Ogni versione successiva dovrà essere il risultato di un confronto con la pratica didattica. Commenti e suggerimenti da parte degli insegnanti che l’abbiano adottato possono essere inviati per email all’autore. Saranno preziosi per la maturazione del testo.



## 2. Aritmetica con l'unità infinita ①

### 2.1 Riserve numerali e sistemi numerali

Quando contiamo un gruppo di oggetti, li prendiamo in considerazione uno ad uno, enumerandoli fino a quando li abbiamo considerati tutti e abbiamo, nello stesso tempo, raggiunto un punto fissato della nostra enumerazione. Se, per esempio, consideriamo un gruppo di nove oggetti, il nostro conteggio si interrompe al termine della successione finita:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Quest'ultima successione descrive un modo con cui noi possiamo 'chiamare' gli oggetti che abbiamo contato, sfruttando simboli numerici. I simboli numerici sono anche noti come *numerali*<sup>1</sup>. Immaginiamo per un momento di avere a disposizione *soltanto* la riserva di numerali da 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (elencati in ordine crescente). Potremmo in tal caso contare qualsiasi gruppo di almeno nove oggetti con esattezza, ma ci troveremmo in difficoltà con gruppi più grandi. Se volessimo rigorosamente attenerci al sistema molto limitato di numerali a nostra disposizione, saremmo costretti a considerare in modo poco accurato un gruppo di undici e un gruppo di cento oggetti, poichè di entrambi sapremmo soltanto dire che contengono più di nove oggetti. Potremmo anche introdurre un nuovo simbolo che indichi, in maniera forzatamente generica, il numero di oggetti in gruppi sufficientemente grandi.

<sup>1</sup> Avremmo potuto effettuare il medesimo conteggio attraverso, ad esempio, i numerali romani I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.

Proviamo ad utilizzare in tal modo il simbolo  $\infty$ , che in questo contesto indica 'più di nove'. Dobbiamo allora assegnare  $\infty$  all'esito di un conteggio effettuato su un gruppo di dieci oggetti, dal momento che la nostra riserva numerale ci permette di contare con esattezza soltanto gruppi più piccoli. Inoltre, se aggiungiamo un oggetto al gruppo di dieci a cui abbiamo assegnato  $\infty$ , un conteggio sul gruppo risultante ci conduce nuovamente alla valutazione  $\infty$ . In certo modo, stiamo verificando concretamente che vale una relazione esprimibile mediante la formula  $\infty + 1 = \infty$ .

Le nostre risorse numerali ci impongono restrizioni notevoli: relativamente ad esse, un gruppo di dieci oggetti ed uno di cento oggetti risultano indistinguibili: in entrambi i casi si tratta di gruppi composti da  $\infty$  elementi. Raggruppandoli insieme, otterremmo di nuovo un gruppo di  $\infty$  elementi e potremmo dire di aver verificato una relazione come  $\infty + \infty = \infty$ .

Vediamo che, se volessimo utilizzare la riserva numerale:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \infty$$

ai fini del calcolo, potremmo operare nel modo a noi familiare su numeri sufficientemente piccoli ma, quando ci trovassimo di fronte a numeri relativamente grandi o a  $\infty$ , saremmo costretti a ricorrere ad uguaglianze come  $\infty + 1 = \infty$  e  $\infty + \infty = \infty$ . Consideriamo le ultime uguaglianze aritmeticamente corrette ma basate su una capacità di discriminazione numerica relativamente bassa.

Il fatto che siamo costretti dalla limitata riserva di numerali a nostra disposizione ad effettuare valutazioni poco accurate rende altre valutazioni del tutto impraticabili. Questo problema si riflette sull'applicabilità del calcolo aritmetico. Infatti i numerali sono coinvolti nel calcolo non soltanto come specificazioni scelte arbitrariamente, ma anche al fine di anticipare nel ragionamento le conseguenze di possibili operazioni concrete. Se abbiamo, ad esempio, tre mele e ne mangiamo una, ce ne restano due. Prima ancora di soddisfare il nostro appetito, possiamo trarre questa conclusione dal semplice calcolo aritmetico  $3 - 1 = 2$ . Se tuttavia ci troviamo di fronte a due gruppi di oggetti molto grandi rispetto alla nostra riserva numerale, la sottrazione di uno dall'altro viene espressa dal termine  $\infty - \infty$ , al quale non possiamo assegnare alcun valore determinato. In altre parole  $\infty - \infty$  non ci permette di anticipare alcuna conseguenza determinata, dal momento che, per ogni simbolo a nostra disposizione, c'è un contesto in cui  $\infty - \infty$  è valutato da quel simbolo (per gruppi di venti e dieci oggetti rispettivamente, dobbiamo aspettarci  $\infty - \infty = \infty$ , ma per gruppi di venti

e undici oggetti rispettivamente dobbiamo aspettarci  $\infty - \infty = 9$  e, ancora, per gruppi di venti e dodici oggetti, dobbiamo aspettarci  $\infty - \infty = 8$ , e così via). Diciamo che  $\infty - \infty$  è una **forma indeterminata**. È chiaro da quanto abbiamo osservato finora che, se dovessimo utilizzare la riserva di numerali  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \infty$  in circostanze nelle quali avessimo a che fare tipicamente con gruppi di almeno una decina di oggetti, le risorse a nostra disposizione sarebbero decisamente inadatte alle nostre esigenze. Saremmo infatti frequentemente costretti ad offrire valutazioni molto vaghe delle combinazioni possibili fra questi gruppi e non saremmo affatto in grado di determinare in anticipo gli esiti di certe operazioni effettuabili su di essi.

Possiamo tentare di riformulare le ultime considerazioni in termini generali. Contare e calcolare sulla base di una riserva di numerali eccessivamente ristretta in relazione alla riserva di oggetti a cui tali numerali possono essere applicati conduce a due problemi fra loro collegati. In primo luogo, i numerali dati non ci permettono di discriminare contando gruppi di oggetti ai quali vorremmo assegnare determinazioni numeriche distinte. In secondo luogo, i numerali dati producono nel calcolo aritmetico forme indeterminate, cioè rendono impossibile fare affidamento su tale calcolo per determinare in anticipo le conseguenze di certe operazioni concrete sugli oggetti a cui il calcolo si applica. In sostanza, se consideriamo i numerali a nostra disposizione come uno strumento in relazione ad un contesto applicativo, essi possono risultare insufficienti a stabilire le determinazioni numeriche di cui abbiamo bisogno nel contesto che ci interessa. Una soluzione piuttosto immediata a questo problema consiste nell'ampliare la riserva di numerali. È chiaro tuttavia che un ampliamento effettuato mediante, poniamo, l'aggiunta di un nuovo simbolo, non cambierebbe in generale la nostra situazione. Ci serve un ampliamento sistematico: per questo motivo non ci avvaliamo semplicemente di una riserva di numerali, quanto piuttosto di un *sistema* numerale.

Il sistema numerale più noto è probabilmente quello in base dieci. Questo sistema fa uso della successione di simboli:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

e delle loro combinazioni in termini di potenze di dieci. Ad esempio, il numerale 2 è un'abbreviazione del termine in base dieci  $2 \cdot 10^0$ . Allo stesso modo, il numerale 27 è un'abbreviazione del termine in base dieci  $2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ , che indica  $20 + 7 = 27$ . Ancora, il numerale 584 è un'abbreviazione del termine in base dieci:

$$5 \cdot 10^2 8 \cdot 10^1 4 \cdot 10^0,$$

che indica  $500 + 80 + 4 = 584$ . Il vantaggio di un sistema numerale come quello in base dieci è che previene le difficoltà prodotte dall'uso di una riserva numerale troppo esigua. Per ogni riserva numerale concretamente data (una lista di simboli che è possibile scrivere in un tempo finito) il sistema numerale in base dieci offre un ampliamento delle sue capacità di determinazione numerica. Nonostante ciò, possiamo domandarci se vi siano circostanze nelle quali persino il nostro sistema numerale in base dieci risulti inadeguato.

## 2.2 Numeri naturali

Il sistema numerale in base dieci appena descritto permette di contare gruppi di oggetti ai quali si applica come uno strumento di determinazione numerica. Non vi sono oggetti prescritti a cui questo strumento si debba applicare: esso può essere trasferito da un contesto ad un altro. In particolare, può essere utilizzato per contare gruppi di iscrizioni o di segni. Per esempio, dati i numerali:

$$1, 2, 3, 4,$$

considerati come segni da contare, è possibile adottare il sistema numerale in base dieci da noi descritto per contarli. Riusciamo a conseguire il medesimo risultato per ogni successione di iscrizioni del tipo:

$$1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n,$$

dove  $n$  è un segno esprimibile nel sistema numerale in base dieci. Tale sistema numerale funziona come un regolo le cui tacche sono segnate dei numerali  $1, 2, 3, \dots$  e che ci presenta, in corrispondenza di ogni successione come  $1, 2, \dots, n-1, n$  un ambiente ordinato più esteso, di cui la successione individua una porzione iniziale. Nella matematica classica, al regolo numerale appena descritto – una sorta di strumento di misura – si fa corrispondere un particolare oggetto, vale a dire l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali. Possiamo descrivere questo insieme nel modo seguente:

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}.$$

I simboli in grassetto designano enti contenuti in  $\mathbb{N}$ , ai quali possiamo assegnare numerali nel nostro sistema in base dieci. Le parentesi graffe indicano che non stiamo considerando oggetti come  $\mathbf{1}$  o  $\mathbf{2}$  presi separatamente,

ma una intera collezione di oggetti, a cui appunto abbiamo dato il nome  $\mathbb{N}$ . Diciamo che  $\mathbb{N}$  è una collezione infinita, nel senso che nessuna riserva numerale  $1, 2, \dots, n-1, n$ , con  $n$  esprimibile in base dieci, la può contare. Ne segue che il nostro sistema numerale in base dieci dev'essere inadeguato sia a contare la totalità di oggetti nella collezione  $\mathbb{N}$  che a svolgere calcoli aritmetici relativamente a  $\mathbb{N}$ . Quest'affermazione, per ora vaga, risulterà più chiara se riusciremo a rilevare, rispetto al nostro sistema numerale in base dieci e al contesto di conteggio e calcolo in relazione all'oggetto  $\mathbb{N}$ , gli stessi problemi che abbiamo individuato, in riferimento ad una riserva numerale specificata, nella sezione 2.1. Dobbiamo insomma mostrare che il sistema numerale in base dieci è incapace di istituire distinzioni numeriche tra gruppi di enti in  $\mathbb{N}$  e che produce forme indeterminate. Per ottenere questi risultati, facciamo appello al seguente principio generale.

**Principio Euclideo:** il tutto è maggiore della parte.

Possiamo inoltre, in piena analogia con la discussione precedente, che si appoggiava all'uso del simbolo  $\infty$ , introdurre un numero infinito associato all'intera collezione  $\mathbb{N}$ , vale a dire il numero infinito chiamato  $\aleph_0$  ('alef con zero'), introdotto dal matematico Georg Cantor (1845–1918). Assegniamo ad una collezione  $C$  di oggetti in  $\mathbb{N}$  il numero chiamato  $\aleph_0$  se un conteggio di  $\mathbb{N}$  mediante il nostro sistema numerale in base dieci può essere trasformato in un conteggio di  $C$  mediante lo stesso sistema numerale. Un conteggio di  $\mathbb{N}$ , in questo contesto, può essere soltanto un conteggio che non ha fine e che dobbiamo rappresentare nel modo seguente:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n-1, n, n+1, \dots,$$

dove  $n$  è esprimibile nel sistema numerale in base dieci. Prendiamo una parte di  $\mathbb{N}$ , ad esempio la collezione dei numeri pari. Dato il conteggio di  $\mathbb{N}$  descritto sopra, noi possiamo trasformarlo in un conteggio dei numeri pari semplicemente prendendo il doppio di ciascun numerale elencato nel conteggio iniziale. Otteniamo in tal modo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & & \end{array}$$

Ciò significa che possiamo assegnare  $\aleph_0$  alla collezione dei numeri pari. D'altro canto, prendendo il predecessore di ciascun numero pari, possiamo ottenere la seguente trasformazione di conteggi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots, & & \end{array}$$

che ci permette di assegnare  $\aleph_0$  anche alla collezione dei numeri dispari.

**Esercizio 1.** Verificare che  $\aleph_0$  è assegnato alle seguenti collezioni di oggetti in  $\mathbb{N}$ :

- a) la collezione ottenuta da  $\mathbb{N}$  escludendone **1 e 2**;
- b) la collezione ottenuta da  $\mathbb{N}$  escludendone tutti i numeri da **1 a 100**;
- c) la collezione dei multipli di **3**;
- d) la collezione dei multipli di **4**;
- e) la collezione ottenuta da quella dei numeri pari escludendone i multipli di **4**.

La collezione ottenuta da  $\mathbb{N}$  escludendone **1 e 2** contiene due oggetti meno dell'intera collezione. Ne è quindi una parte. Il modo con cui assegniamo  $\aleph_0$ , basandoci sul sistema numerale disponibile, ci impedisce tuttavia di registrare numericamente questa distinzione fra tutto e parte, come visto nell'esercizio (1.a). Per il principio Euclideo, la distinzione deve sussistere, ma le risorse numerali di cui facciamo uso ci impediscono di esprimerla. Il caso dei numeri pari è ancora più significativo, dal momento che si ottengono da  $\mathbb{N}$  escludendone un numero infinito di oggetti. Nondimeno, il sistema numerale a nostra disposizione ci impedisce di registrare persino questa differenza. Per l'esercizio (1.d), non siamo nemmeno in grado di distinguere la parte dei numeri pari ottenuta eliminandone l'infinità di oggetti che non sono multipli di 4. Insomma,  $\aleph_0$  si comporta come  $\infty$  nel nostro esempio iniziale. Se intendessimo coinvolgerlo nel calcolo aritmetico, produrrebbe senz'altro forme indeterminate. Infatti  $\aleph_0 - \aleph_0$ , può, in contesti opportunamente scelti, essere associato tanto a  $\aleph_0$  che a un  $n$  fissato a piacere ed esprimibile in base dieci. Per esempio, se sottraiamo a  $\mathbb{N}$  la collezione in (1.a), dobbiamo aspettarci  $\aleph_0 - \aleph_0 = 2$  ma, se sottraiamo alla collezione dei numeri pari quella dei multipli di quattro, dobbiamo aspettarci  $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$ . Data l'impossibilità di controllare univocamente attraverso il calcolo il risultato di  $\aleph_0 - \aleph_0$ , ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata. Questo non significa che l'uso di  $\aleph_0$  dia adito a contraddizioni, ma soltanto che, da un punto di vista aritmetico, esso non garantisce una molteplicità di determinazioni numeriche adeguata

alle applicazioni richieste dal contesto  $\mathbb{N}$ . Poichè inoltre l'assegnazione di  $\aleph_0$  si regge sull'uso di uno specifico sistema numerale, vale a dire il sistema numerale in base dieci, quest'ultimo è portatore delle limitazioni che abbiamo rivelato nell'impiego di  $\aleph_0$ . Noi abbiamo già risolto le difficoltà legate all'uso di una riserva numerale introducendo un sistema numerale più espressivo. Possiamo fare la stessa cosa rispetto al sistema numerale in base dieci adottato fino a questo punto.

### 2.3 Un nuovo sistema numerale

Abbiamo visto che il sistema numerale in base dieci introdotto alla fine della sezione 2.1 può essere considerato come un particolare tipo di strumento. Lo abbiamo paragonato ad un regolo che ci presenta, in corrispondenza di ogni collezione di oggetti contata lungo  $1, 2, \dots, n-1, n$  (con  $n$  esprimibile in base dieci), un ambiente ordinato più esteso, di cui la successione  $1, 2, \dots, n-1, n$  individua una porzione iniziale. Per costruire un sistema numerale più ricco di quello utilizzato finora, procediamo nello stesso modo. Introduciamo un regolo più esteso, che indichi con il simbolo  $\textcircled{1}$  ('gross-one', letto all'inglese) *il punto in cui la collezione  $\mathbb{N}$  è completamente contata*. In altre parole ci avvaliamo di un regolo esteso le cui tacche presentano ordinatamente numerali disposti come qui sotto:

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n, \dots, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}, \textcircled{1}+1, \dots$$

con  $n$  esprimibile in base dieci. Contando lungo il nuovo regolo, noi esauriremo  $\mathbb{N}$  quando raggiungiamo il termine della successione di numerali:

$$1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-2, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}.$$

L'estensione ad un nuovo sistema numerale corrisponde all'introduzione di due richieste<sup>2</sup>. La prima è che  $\textcircled{1}$  compaia nell'ordinamento del regolo numerale dopo ogni numerale esprimibile in base dieci. La seconda è che sia possibile operare aritmeticamente su  $\textcircled{1}$  nello stesso modo in cui si opera sui simboli aritmetici esprimibili in base dieci. Per la prima richiesta possiamo collocare  $\textcircled{1}$  dopo un generico  $n$ . Per la seconda richiesta possiamo scrivere, ad esempio,  $\textcircled{1}-1$ , essendo certi che questo simbolo vada collocato lungo il regolo appena prima di  $\textcircled{1}$ . Se ora applichiamo un regolo esteso le cui tacche siano segnate da simboli nel nuovo sistema numerale, possiamo farlo corrispondere all'oggetto:

<sup>2</sup>Usiamo il termine richieste perchè evoca la parola greca *aitemata*, utilizzata negli *Elementi* di Euclide. Il suo significato letterale è 'le cose richieste' ma viene di norma tradotta con 'postulati'.

$$\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}, \textcircled{1} + 1, \dots\}$$

e riformulare le nostre due richieste nel modo seguente:

- **RICHIESTA 1:** Se  $n$  è un numero positivo esprimibile in base dieci, vale la disuguaglianza  $n < \textcircled{1}$ ;
- **RICHIESTA 2:** Le proprietà formali di ordine, addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza valgono per tutti gli oggetti nell'ambiente dato.

Date le nostre richieste, possiamo ragionare, ad esempio, come segue: supponiamo che  $m$  sia un numero qualsiasi esprimibile in base dieci. Certamente allora anche  $m + 1$  è esprimibile in base dieci e  $1 < m + 1$ . Per la Richiesta 1, vale  $m + 1 < \textcircled{1}$  (ponendo  $n = m + 1$ ). Per la Richiesta 2, la proprietà:

$$\text{se } m + 1 < x \text{ allora } m < x - 1$$

deve valere in  $\mathcal{N}$ . In particolare, essa varrà per  $x = \textcircled{1}$ . Ne segue  $m < \textcircled{1} - 1$ . Ma  $m$  è un numero qualsiasi esprimibile in base dieci, quindi  $\textcircled{1} - 1$  è maggiore di qualsiasi numero esprimibile in base dieci. Inoltre, poichè la relazione:

$$x - 1 < x$$

vale in  $\mathcal{N}$  per la Richiesta 2, possiamo concludere che  $\textcircled{1} - 1$  precede  $\textcircled{1}$  e segue ciascuno dei numeri esprimibili in base dieci.

**Esercizio 2.** Utilizzare le Richieste 1 e 2 per dimostrare le seguenti disuguaglianze:

- $\textcircled{1} < \textcircled{1} + 1$ ;
- $\textcircled{1} < \textcircled{1} + \textcircled{1}$ ;
- $2\textcircled{1} < 6\textcircled{1}$ ;
- $7(\textcircled{1} - 1) < \textcircled{1}^2$  (N.B.:  $\textcircled{1}^2$  abbrevia la moltiplicazione  $\textcircled{1} \cdot \textcircled{1}$ ).

Abbiamo visto che, nel sistema numerale in base dieci descritto in precedenza, certe notazioni abbreviate come 123 si riferiscono a termini che, resa esplicita la base di riferimento, assumono una forma differente, nella fattispecie:

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0,$$



dove il coefficiente di ciascuna potenza di dieci indica un numero minore della base. Il nuovo sistema numerale da noi introdotto non ha base dieci ma base ①. Possiamo in esso introdurre una notazione del tutto analoga a quella adottata per la base dieci. Noi non faremo uso di questa notazione nelle pagine seguenti ma vogliamo almeno farvi cenno per chiarire in che senso il punto d'arrivo della discussione svolta nelle pagine precedenti sia effettivamente le costruzione di un nuovo sistema numerale.

### 2.3.1 Notazione in base ①

Abbiamo osservato che, in base dieci, i coefficienti numerici di ciascuna potenza della base indicano numeri minori della base. In base gross-one, accade la stessa cosa. Possiamo cioè esprimere un numero in base gross-one utilizzando le potenze di gross-one e coefficienti minori di gross-one. Ciò significa, in particolare, che qualsiasi numero esprimibile in base dieci è un coefficiente. Così, ad esempio, il simbolo numerale ① + 2 risulta, nella notazione in base ①, espresso da:

$$1 \cdot \textcircled{1}^1 2 \cdot \textcircled{1}^0,$$

dove  $\textcircled{1}^0 = 1$  per la Richiesta 2. Inoltre, se  $n$  è un numerale esprimibile in base dieci, gli corrisponde, nel nuovo sistema numerale, la notazione:

$$n \cdot \textcircled{1}^0.$$

Vediamo quindi che il nuovo sistema numerale in base ① esprime i numerali in base dieci come termini particolari, in cui non occorrono potenze positive di ①. Chiamiamo questo tipo di termini *finiti*. Per contrasto, chiamiamo *infiniti* i termini che contengono potenze positive, finite o infinitamente grandi, di ①. Ad esempio:

$$1 \cdot \textcircled{1}^2 \text{ e } 2 \cdot \textcircled{1}^7 5 \cdot \textcircled{1}^3 12 \cdot \textcircled{1}^0$$

sono termini infiniti. Vale la pena notare che non vi è alcuna restrizione sugli esponenti delle potenze di ①. Ad esempio  $1 \cdot \textcircled{1}^{\textcircled{1}}$  è un termine

infinito.

**Esercizio 3.** Scrivere nella notazione in base ① i seguenti termini:

- a) 10;
- b) 487;
- c) ① + 6;
- d) 5① + 3;
- e)  $7①^3 + 51① + 234$ .
- f)  $①^{①+3}$ .

Da ora in poi abbandoneremo la notazione del sistema numerale in base ① e faremo semplicemente uso di termini aritmetici, con i quali sarà molto facile eseguire calcoli. Ecco un esempio:

**Esempio 1.** *Semplificare l'espressione*  $5(① + 2) - 4(① + 3)$ . L'aritmetica ordinaria ci permette di calcolare:

$$\begin{aligned}
 5(① + 2) - 4(① + 3) &= (5① + 10) - 4(① + 3) \\
 &= (5① + 10) - 4① - 12 \\
 &= 5① + 10 - 4① - 12 \\
 &= 5① - 4① + 10 - 12 \\
 &= ① - 2
 \end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Semplificare le seguenti espressioni:

- a)  $① + 4① + 3$ ;
- b)  $3① + 2(① + 3)$ ;
- c)  $5(① + 4) + 4(① + 5)$ .

## 2.4 Numeri interi

Finora ci siamo limitati a considerare un sistema numerale adeguato a portare a compimento un conteggio degli elementi di  $\mathbb{N}$ , visto ormai come una parte dell'ambiente ordinato più ampio  $\mathcal{N}$ , in cui le Richieste 1 e 2 sono soddisfatte. Tuttavia è chiaro che, ai fini del calcolo aritmetico, vogliamo

poter essere in grado di determinare il risultato di operazioni come  $1 - 3$  oppure  $\textcircled{1} - \textcircled{1}$ , il cui risultato non può essere un numero intero positivo. A tale scopo dobbiamo estendere il nostro ambiente di riferimento da  $\mathcal{N}$  ad un dominio più ampio, in cui le Richieste 1 e 2 continuano a valere. Descriviamo il nuovo ambiente in questo modo:

$$\mathcal{Z} = \{\dots - (\textcircled{1} + \textcircled{1}), -\textcircled{1}, -(\textcircled{1} - \textcircled{1}), \dots, -\textcircled{2}, -\textcircled{1}, \mathbf{0}, \textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{1} - \textcircled{1}, \textcircled{1}, \textcircled{1} + \textcircled{1}, \dots\}.$$

Ammettiamo quindi di dover calcolare  $\textcircled{1} - \textcircled{1}$ . Per la Richiesta 2, la relazione  $x - x = 0$  vale per tutti gli oggetti in  $\mathcal{Z}$ , quindi  $\textcircled{1} - \textcircled{1} = 0$ . In modo del tutto analogo, dovendo calcolare  $2\textcircled{1} - 3\textcircled{1}$ , possiamo invocare la relazione  $2x - 3x = -x$  per concludere  $2\textcircled{1} - 3\textcircled{1} = -\textcircled{1}$ . Infine, poichè ogni prodotto, in cui uno dei fattori sia uguale a zero, è nullo, possiamo dedurre che  $0 \cdot \textcircled{1} = 0$ . In questo modo, non vi è alcuna difficoltà ad eseguire calcoli aritmetici in  $\mathcal{Z}$ .

**Esempio 2.** *Semplificare l'espressione  $3\textcircled{1}(2 + 3\textcircled{1}) - \textcircled{1}(3 - \textcircled{1})$ .* Procediamo nel modo usuale:

$$\begin{aligned} 3\textcircled{1}(2 + 3\textcircled{1}) - \textcircled{1}(3 - \textcircled{1}) &= (6\textcircled{1} + 9\textcircled{1}^2) - \textcircled{1}(3 - \textcircled{1}) \\ &= (6\textcircled{1} + 9\textcircled{1}^2) - 3\textcircled{1} + \textcircled{1}^2 \\ &= 6\textcircled{1} + 9\textcircled{1}^2 - 3\textcircled{1} + \textcircled{1}^2 \\ &= 10\textcircled{1}^2 + 3\textcircled{1} \\ &= \textcircled{1}(10\textcircled{1} + 3) \end{aligned}$$

**Esercizio 5.** Semplificare le seguenti espressioni:

- a)  $24(\textcircled{1} + 3) - 8(9 + 3\textcircled{1})$ ;
- b)  $10(6(3\textcircled{1} - 4) - 2(4\textcircled{1} + 7))$ ;
- c)  $\textcircled{1}(2 + \textcircled{1}) - 4\textcircled{1} - 3\textcircled{1}(1 + \textcircled{1})$ ;
- d)  $\textcircled{1}[3(\textcircled{1}^2 - \textcircled{1} + 4) - 6\textcircled{1}(\textcircled{1} - 1) - 12]$ ;
- e)  $2[\textcircled{1}(2\textcircled{1} + 7) + 2(\textcircled{1}^2 + 1) - \textcircled{1}(\textcircled{1}^2 + 4\textcircled{1} - 11)]$ ;
- f)  $(\textcircled{1} + 1)^3 - \textcircled{1}(3\textcircled{1} + 3)$ ;
- g)  $2 - 2\textcircled{1} + [(\textcircled{1} + 1)(\textcircled{1} - 1)]$ .

## 2.5 Misure

Nelle ultime due sezioni abbiamo costruito un calcolo aritmetico che ci permette di lavorare con quantità numeriche finite o infinite, positive o negative. Lo scopo di tale calcolo va tuttavia ricercato nella nostra discussione iniziale (sezione 2.1), che faceva riferimento all'applicazione di riserve o sistemi numerali in contesti in cui interessava contare collezioni di oggetti. Il sistema numerale in base ① è stato introdotto proprio per ampliare le capacità di applicazione offerte dal calcolo aritmetico tradizionale, che, una volta assunto il Principio Euclideo, si rivela inadeguato in relazione all'oggetto  $\mathbb{N}$ . Con le nuove risorse numerali introdotte nella sezione 2.3 siamo in grado di contare gli oggetti della collezione  $\mathbb{N}$  completamente, lungo una sorta di regolo numerale. Ora, quando noi applichiamo un regolo graduato, lo facciamo per effettuare misure. Ad esempio, se ci interessa misurare la lunghezza di un oggetto, facciamo corrispondere uno dei suoi estremi ad un estremo del regolo ed effettuiamo la lettura del numerale segnato sulla tacca in corrispondenza della quale si situa l'altro estremo dell'oggetto (in concreto ci troviamo sempre ad effettuare una stima). Qualcosa di simile accade quando contiamo  $\mathbb{N}$ : un suo estremo viene disposto in corrispondenza del numerale 1 e, in tal caso, noi sappiamo che l'altro suo estremo cadrà in corrispondenza del numerale ①. In questo modo effettuiamo una misura di  $\mathbb{N}$  e possiamo dire che  $\mathbb{N}$  sia una *collezione misurata* nel nuovo sistema numerale la cui misura è appunto ①. Possiamo facilmente trovare altre misure, muovendoci in  $\mathcal{L}$ : se, per esempio, aggiungiamo l'oggetto  $\mathbf{0}$  a  $\mathbb{N}$ , otteniamo una collezione che si può disporre a partire dal numerale 1 ma che si esaurirà in corrispondenza del numerale ① + 1. Quindi, la collezione ottenuta aggiungendo zero ai numeri interi positivi ha misura ① + 1. Notiamo che questa misura si può ottenere sia costruendo una disposizione di numerali che sommando ① e 1, le misure di  $\mathbb{N}$  e della collezione contenente il solo oggetto  $\mathbf{0}$ . Questo fatto è di fondamentale importanza: *ci mostra che il nostro calcolo aritmetico nel sistema numerale in base ① è un calcolo aritmetico di misure*, vale a dire un calcolo aritmetico applicato. Le operazioni che effettuiamo in esso ci permettono di anticipare le conseguenze di possibili operazioni sugli oggetti misurati. Vediamo ancora qualche esempio.

**Esempio 3.** La collezione  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi è composta dalla collezione  $\mathbb{N}$  dei numeri positivi, dalla collezione contenente il solo oggetto  $\mathbf{0}$  e dalla collezione, che possiamo chiamare  $-\mathbb{N}$ , dei numeri negativi. La prima

collezione ha misura  $\textcircled{1}$ , la seconda collezione a misura 1 e la terza collezione ha anch'essa misura  $\textcircled{1}$  (perché?). Ne consegue che  $\mathbb{Z}$  abbia misura  $\textcircled{1} + 1 + \textcircled{1} = 2\textcircled{1} + 1$ .

**Esempio 4.** La collezione  $X$  ottenuta da  $\mathbb{Z}$  sottraendone  $-\mathbb{N}$  e i numeri pari non negativi minori o uguali a 100 ha misura  $\textcircled{1} - 50$ . Infatti  $\mathbb{Z}$  ha misura  $2\textcircled{1} + 1$ ,  $\mathbb{N}$  ha misura  $\textcircled{1}$  e la misura dei numeri pari positivi che sono anche minori o uguali a 100 è 50, a cui si deve aggiungere la misura della collezione contenente il solo  $\mathbf{0}$ . Ne risulta che la misura di  $X$  si determina grazie al seguente calcolo aritmetico:  $(2\textcircled{1} + 1) - (\textcircled{1} + 50 + 1) = \textcircled{1} - 50$ .

**Esercizio 6.** Calcolare le misure delle seguenti collezioni in  $\mathcal{L}$ :

- a) la collezione  $A$  ottenuta sottraendo  $\mathbb{N}$  da  $\mathbb{Z}$ ;
- b) la collezione  $B$  ottenuta combinando la collezione contenente il doppio di ciascun numero negativo in  $\mathbb{Z}$  e la collezione degli oggetti da  $\textcircled{1} - \mathbf{8}$  a  $\mathbf{6}\textcircled{1}$ ;
- c) la collezione  $D$  ottenuta da  $\mathbb{N}$  sottraendone i primi e gli ultimi cinquanta oggetti e aggiungendovi la collezione  $B$ ;
- d) la collezione  $E$  ottenuta combinando la collezione  $A$  e la collezione  $B$ .

È abbastanza naturale considerare alcune collezioni di cui, a questo punto, non abbiamo mezzi per determinare la misura. Una di esse è la collezione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$ . Per includere nel nostro calcolo aritmetico questa e altre misure altrimenti elusive, dobbiamo introdurre una nuova Richiesta, la cui formulazione richiede qualche cenno preliminare. Concentriamoci sulle collezioni dei numeri pari e dispari in  $\mathbb{N}$ . I numeri pari si possono individuare come quegli oggetti in  $\mathbb{N}$  che, divisi per due, danno resto zero. I numeri dispari, invece, divisi per due danno resto uno. Notiamo che:

- la divisione per due può generare soltanto resto zero o resto uno;
- nel primo caso, essa individua i numeri pari in  $\mathbb{N}$ ;
- nel secondo caso, essa individua i numeri dispari in  $\mathbb{N}$ ;
- $\mathbb{N}$  risulta suddiviso dai numeri pari e dispari in due collezioni che non hanno alcun oggetto in comune.

Chiamiamo la collezione dei numeri in  $\mathbb{N}$  che hanno lo stesso resto nella divisione per due una **classe resto modulo 2**. Ci sono due classi resto modulo 2, la classe dei pari e quella dei dispari. Queste classi resto suddividono  $\mathbb{N}$  in due parti che non hanno oggetti comuni. Le osservazioni svolte finora si possono estendere alla divisione per altri numeri fissati. Prendiamo per esempio la divisione per tre. I possibili resti della divisione per tre sono zero, uno, due. Ci sono quindi tre classi resto modulo 3 in  $\mathbb{N}$ . Queste classi resto non possono avere nessun oggetto in comune, altrimenti ci sarebbe un numero che, diviso per tre, determina due resti differenti. Inoltre, qualsiasi numero in  $\mathbb{N}$  può essere diviso per tre, quindi la divisione per tre suddivide  $\mathbb{N}$  in tre classi resto. In modo analogo, la divisione per quattro suddivide  $\mathbb{N}$  in quattro classi resto. Vogliamo richiedere che queste suddivisione di  $\mathbb{N}$  in classi resto si considerino come suddivisioni in parti uguali. Quindi, poichè ① misura  $\mathbb{N}$ , richiediamo che la sua suddivisione nelle classi resto modulo 2 sia una suddivisione in due parti uguali, ciascuna di misura ①/2. Analogamente, richiediamo che la suddivisione di  $\mathbb{N}$  nelle classi resto modulo 3 sia una suddivisione in tre parti uguali, ciascuna di misura ①/3. Allo stesso modo, richiediamo che la suddivisione di  $\mathbb{N}$  nelle classi resto modulo 4 sia una suddivisione in quattro parti uguali, ciascuna di misura ①/4. La nostra richiesta si può formulare in modo generale. Prendiamo  $n$  qualsiasi esprimibile in base dieci.

- **RICHIESTA 3:** Ogni classe resto di  $\mathbb{N}$  modulo  $n$  ha misura ①/ $n$ , in modo tale che  $n(\textcircled{1}/n) = \textcircled{1}$ .

Soffermiamoci sul caso  $n = 2$ . Consideriamo  $m > 0$  qualsiasi esprimibile in base dieci. Poichè  $m + m = 2m$  è ancora esprimibile in base dieci, abbiamo  $2m < \textcircled{1}$  per la Richiesta 1. Dal momento che, per la Richiesta 3, deve valere:

$$\frac{\textcircled{1}}{2} + \frac{\textcircled{1}}{2} = 2\frac{\textcircled{1}}{2} = \textcircled{1},$$

concludiamo che  $m < \textcircled{1}/2$  per qualsiasi  $m$  esprimibile in base dieci. Se infatti fosse  $\textcircled{1}/2 \leq m$ , avremmo  $\textcircled{1} = \textcircled{1}/2 + \textcircled{1}/2 \leq m + m = 2m$ , in contraddizione con la Richiesta 1. Questo significa che, in particolare,  $0 < \textcircled{1}/2$ . Dal momento che, se  $0 < x$ ,  $x < x + x$ , otteniamo, per la Richiesta 2 (con  $x = \textcircled{1}/2$ ), la disuguaglianza  $\textcircled{1}/2 < \textcircled{1}$ . Dal momento che  $\mathbb{N}$  è contato da ① numerali, ne segue che, nel corso di questo conteggio, che inizia con 1, dobbiamo incontrare ①/2, il quale si presenta, per la precisione, dopo tutti i numerali esprimibili in base dieci e a metà del conteggio. Per la ri-

chiesta 2, sappiamo che  $\textcircled{1}/2$  dev'essere preceduto da  $\textcircled{1}/2 - 1$  e seguito da  $\textcircled{1}/2 + 1$ . Possiamo quindi arricchire la nostra descrizione della successione di numerali corrispondente ad un conteggio completo di  $\mathbb{N}$ . Tale successione ha questo aspetto:

$$1, 2, 3, 4, \dots, \frac{\textcircled{1}}{2} - 1, \frac{\textcircled{1}}{2}, \frac{\textcircled{1}}{2} + 1, \dots, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}.$$

Per la Richiesta 3, lungo la successione vengono contati  $\textcircled{1}/2$  numeri pari. Notiamo che  $\textcircled{1}$ , essendo il doppio di un numero in  $\mathbb{N}$  (vale a dire  $\textcircled{1}/2$ ) è un numero pari. Quindi, una lista di numerali che indichino i numeri pari in  $\mathbb{N}$  deve comprendere esattamente  $\textcircled{1}/2$  elementi e terminare con  $\textcircled{1}$ . Questa lista avrà il seguente aspetto:

$$2, 4, 6, \dots, \textcircled{1} - 4, \textcircled{1} - 2, \textcircled{1}.$$

Se ora confrontiamo un conteggio completo di  $\mathbb{N}$  con un conteggio completo dei numeri pari in  $\mathbb{N}$ , otteniamo le liste di numerali seguenti:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \frac{\textcircled{1}}{2} - 1 & \frac{\textcircled{1}}{2} & \frac{\textcircled{1}}{2} + 1 & \dots & \textcircled{1} - 1 & \textcircled{1}. \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & \textcircled{1} - 2 & \textcircled{1}. \end{array}$$

Il sistema numerale in base dieci da noi inizialmente adottato ci permette di identificare l'inizio dei due conteggi, ma non ci offre alcuna informazione sul suo completamento. Per questo motivo abbiamo potuto assegnare  $\aleph_0$  tanto a  $\mathbb{N}$  che alla collezione dei numeri pari. Il nuovo sistema numerale da noi introdotto permette di trattare le due collezioni non come indistinguibili ma come numericamente determinate da misure differenti, una minore dell'altra (infatti  $\textcircled{1}/2 < \textcircled{1}$ ). Analoghe considerazioni si applicano ai numeri

dispari.

**Esercizio 7.** Negli esercizi seguenti, introduciamo una nuova notazione. Chiamiamo  $\mathbb{N}_{k,n}$  la classe resto modulo  $n$  in  $\mathbb{N}$  i cui elementi danno resto  $k$  nella divisione per  $n$  (qui  $k$  varia tra 0 e  $n - 1$ ). In questa notazione  $\mathbb{N}_{0,2}$  è la collezione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$ .

- Per quali valori di  $k, n$   $\mathbb{N}_{k,n}$  è la collezione dei numeri dispari?
- Mettere a confronto un conteggio completo di  $\mathbb{N}$  e la lista di numerali che conta  $\mathbb{N}_{0,5}$ ;
- Per quali valori di  $k, n$   $\mathbb{N}_{k,n}$  è la collezione dei multipli di tre? Quanti elementi ha questa successione?
- Mettere a confronto un conteggio completo di  $\mathbb{N}$  e la lista di numerali che conta  $\mathbb{N}_{1,3}$ ;
- Mettere a confronto un conteggio completo di  $\mathbb{N}$  e la lista di numerali che conta  $\mathbb{N}_{2,5}$ ;
- Mettere a confronto la lista di numerali che conta  $\mathbb{N}$ , la lista di numerali che conta  $\mathbb{N}_{0,2}$  e la lista di numerali che conta  $\mathbb{N}_{0,4}$ .

### 2.5.1 Numeri pari e dispari

Abbiamo finora parlato della collezione di numeri pari in  $\mathbb{N}$ . Infatti si può parlare anche di numeri pari, o dispari, in  $\mathcal{N}$  o  $\mathcal{Z}$ . Per stabilire se un numero in  $\mathcal{N}$  o  $\mathcal{Z}$  sia pari o dispari basta controllare se sia un multiplo (finito, o infinito, positivo o negativo) di 2. Abbiamo già visto che ① designa un numero pari in  $\mathbb{N}$ . Ne segue, per la Richiesta 2, che ① - 1 indica un numero dispari in  $\mathbb{N}$  e che ① + 1 indica un numero dispari in  $\mathcal{N}$  ma non in  $\mathbb{N}$ . Infatti numeri pari e dispari si alternano. Consideriamo ora il termine ①/2: questo termine indica un numero pari o dispari? Congetturiamo che sia pari. Se così fosse, dovremmo essere in grado di designare un numero di cui ①/2 indichi il doppio. Consideriamo la collezione  $\mathbb{N}_{0,4}$  dei multipli di quattro. Per la Richiesta 3, questa collezione ha ①/4 elementi. Poichè, per la Richiesta 2, valgono le usuali leggi aritmetiche dell'addizione, possiamo scrivere:

$$\left(\frac{\textcircled{1}}{4} + \frac{\textcircled{1}}{4}\right) + \left(\frac{\textcircled{1}}{4} + \frac{\textcircled{1}}{4}\right) = 2 \left(\frac{\textcircled{1}}{4} + \frac{\textcircled{1}}{4}\right) = \textcircled{1}.$$



Noi sappiamo già che  $2(\textcircled{1}/2) = \textcircled{1}$ , quindi siamo in grado di concludere:

$$2\left(\frac{\textcircled{1}}{4} + \frac{\textcircled{1}}{4}\right) = 2\frac{\textcircled{1}}{2},$$

cioè, per la Richiesta 2, che ci permette di semplificare il fattore comune 2:

$$\frac{\textcircled{1}}{4} + \frac{\textcircled{1}}{4} = \frac{\textcircled{1}}{2}.$$

Dal momento che  $\textcircled{1}/2$  indica il doppio del numero designato dal numerale  $\textcircled{1}/4$ , si tratta di un numero pari, che inoltre è in  $\mathbb{N}$ . Ne segue che sia  $\textcircled{1}/2 - 1$  che  $\textcircled{1}/2 + 1$  indicano numeri dispari in  $\mathbb{N}$ . D'ora in poi eviteremo di utilizzare locuzioni come 'il numero designato dal numerale  $\textcircled{1}/2$ ' o 'il numero indicato da  $\textcircled{1}/2$ ' per via della loro pesantezza. Diremo invece semplicemente 'il numero  $\textcircled{1}/2$ '. È tuttavia della massima importanza tenere a mente che, tutte le volte che lavoriamo nel calcolo e nella misura con valori numerici determinati, noi facciamo inevitabilmente appello ad un sistema numerale che ci permette di esprimerli.

**Esempio 5.** Stabilire se  $(\textcircled{1} - 5)\textcircled{1}$  sia un numero pari e se sia in  $\mathbb{N}$ . Sappiamo che  $\textcircled{1}$  è pari e che  $\textcircled{1} - 5$  è dispari, poichè precede  $\textcircled{1} - 4$ , il quale è senz'altro pari. Per la Richiesta 2, il prodotto di un numero pari e di un numero dispari è pari, quindi in particolare  $(\textcircled{1} - 5)\textcircled{1}$  è pari. Per stabilire se questo numero sia in  $\mathbb{N}$ , consideriamone la forma equivalente  $\textcircled{1}^2 - 5\textcircled{1}$ . Prima di valutare tale forma, facciamo appello alla Richiesta 2, che ci consente di utilizzare la seguente proprietà:

$$\text{se } 0 < x < y \text{ allora } x \cdot y < y \cdot y = y^2.$$

Prendendo in particolare  $x = 6$  e  $y = \textcircled{1}$ , otteniamo  $6\textcircled{1} < \textcircled{1}^2$ . Sottraendo  $5\textcircled{1}$  ad ambo i membri, concludiamo  $\textcircled{1} < \textcircled{1}^2 - 5\textcircled{1}$ , il che vuol dire che  $(\textcircled{1} - 5)\textcircled{1}$  non può essere in  $\mathbb{N}$ .

**Esercizio 8.**

- a) Il numero ①  $\left(\frac{\textcircled{1}}{2}\right)$  è pari o dispari? È in  $\mathbb{N}$ ?
- b) Il numero  $\frac{\textcircled{1}}{7}$  è pari o dispari? È in  $\mathbb{N}$ ?

**Esercizio 9.** Determinare, per ciascuno dei seguenti numeri, se sia pari o dispari e se sia in  $\mathbb{N}$ :

- a) il numero di elementi in  $\mathbb{N}_{0,1}$ ;
- b)  $\frac{\textcircled{1}}{5}$ ;
- c)  $\frac{\textcircled{1}}{3} + 1$ ;
- d)  $\textcircled{1} - \frac{\textcircled{1}}{6}$ ;
- e)  $\frac{\textcircled{1}}{3} + \frac{\textcircled{1}}{4} - 2$ ;
- f)  $3 \left(3 + \frac{\textcircled{1}}{6}\right)$ .
- g)  $\left(\frac{\textcircled{1}}{5} - \frac{\textcircled{1}}{7}\right) + \frac{\textcircled{1}}{2}$ ;
- h)  $-\left(\frac{\textcircled{1}}{3} + 1\right) \left(\frac{\textcircled{1}}{3} - 1\right)$ ;
- i)  $\left(\frac{\textcircled{1}}{2} - 3\right) \left(\frac{\textcircled{1}}{7} - 3\right) (\textcircled{1} - 1)$ .

## 2.6 Frazioni

Nelle precedenti sezioni abbiamo lavorato in una nuova aritmetica, facendo riferimento a numeri finiti ed infiniti o nel contesto di  $\mathcal{N}$  o nel contesto più ampio di  $\mathcal{L}$ . Con l'introduzione della Richiesta 3, tuttavia, abbiamo introdotto quelle che potremmo definire misure frazionarie di parti di  $\mathbb{N}$ . Sebbene abbiamo a disposizione queste misure, non siamo ancora in grado di sfruttare appieno un calcolo su di esse. Un tale calcolo comincia tuttavia a profilarsi, grazie al fatto che stiamo lavorando con numerali applicati, i quali misurano collezioni di oggetti. Consideriamo, a scopo illustrativo, i numeri  $\textcircled{1}/2$  e  $\textcircled{1}/3$ , di cui vogliamo calcolare la differenza  $\textcircled{1}/2 - \textcircled{1}/3$ . Poichè si tratta di due numeri interi e  $\textcircled{1}/2 > \textcircled{1}/3$ , la loro differenza dev'essere un elemento di  $\mathcal{N}$ . Potremmo provare a determinare la differenza cercata prendendo una collezione di  $\textcircled{1}/2$  oggetti dalla quale estrarre  $\textcircled{1}/3$  oggetti, per poi contare gli oggetti restanti. Consideriamo dunque la collezione dei numeri pari, di misura  $\textcircled{1}/2$ , e ripartiamola nelle tre classi resto:

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_{2,6} &= \{2 \quad 8 \quad 14 \quad 20 \quad \dots \quad \textcircled{1} - 10 \quad \textcircled{1} - 4\} \\ \mathbb{N}_{4,6} &= \{4 \quad 10 \quad 16 \quad 22 \quad \dots \quad \textcircled{1} - 8 \quad \textcircled{1} - 2\} \\ \mathbb{N}_{0,6} &= \{6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad \dots \quad \textcircled{1} - 6 \quad \textcircled{1}\}.\end{aligned}$$

Vediamo, leggendo le colonne dell'elenco di numeri qui sopra e muovendoci dall'alto in basso e da sinistra a destra, che le classi resto da noi considerate esauriscono i numeri pari in  $\mathbb{N}$ . Grazie alla Richiesta 3, sappiamo che ciascuna di queste classi resto ha misura  $\textcircled{1}/6$ . Possiamo inoltre sfruttare le Richieste 2 e 3 per verificare che  $2(\textcircled{1}/6) = \textcircled{1}/3$ . Ciò significa che, eliminando da  $\mathbb{N}_{0,2}$ , di misura  $\textcircled{1}/2$ , le parti  $\mathbb{N}_{2,6}$  e  $\mathbb{N}_{4,6}$ , complessivamente di misura  $\textcircled{1}/3$ , si ottiene una collezione di misura  $\textcircled{1}/6$ . È dunque verificata la uguaglianza:

$$\frac{\textcircled{1}}{2} - \frac{\textcircled{1}}{3} = \frac{\textcircled{1}}{6}.$$

Certamente siamo in grado di calcolare anche la somma di  $\textcircled{1}/2$  e  $\textcircled{1}/3$ , dal momento che si tratta di una somma in  $\mathcal{N}$  e, per la Richiesta 2, tale somma ha un risultato in  $\mathcal{N}$ . A questo scopo notiamo ancora che la collezione dei numeri pari si può ripartire in tre classi resto, ciascuna di misura  $\textcircled{1}/6$ . Le classi resto  $\mathbb{N}_{1,6}$  e  $\mathbb{N}_{3,6}$  non sono comprese fra esse, ma la somma delle loro misure è precisamente  $\textcircled{1}/3$ . Quindi, la collezione che comprende  $\mathbb{N}_{0,2}$ , di misura  $\textcircled{1}/2$ , e le classi resto  $\mathbb{N}_{1,6}$  e  $\mathbb{N}_{3,6}$ , di misura complessiva  $\textcircled{1}/3$ , comprende cinque classi resto distinte, ciascuna delle quali ha misura  $\textcircled{1}/6$ . Ne segue che:

$$\frac{\textcircled{1}}{2} + \frac{\textcircled{1}}{3} = 5\frac{\textcircled{1}}{6}.$$

È essenziale notare che, per ora, noi possiamo scrivere il numero intero  $5(\textcircled{1}/6)$ , prodotto di un intero finito e di uno infinitamente grande, ma non possiamo ancora scrivere il prodotto  $\textcircled{1}(5/6)$ , dal momento che stiamo lavorando soltanto con numeri interi e  $5/6$  non è uno di essi. Da questa considerazione sorge l'esigenza di ampliare ulteriormente il nostro ambiente numerico di riferimento, che è già coerente con il calcolo di frazioni. Prima di passare al nuovo ampliamento, è istruttivo svolgere qualche esercizio

per impraticchirsi con il trattamento aritmetico delle misure frazionarie.

**Esercizio 10.** Calcolare le seguenti somme e differenze in  $\mathcal{L}$  adattando la strategia appena illustrata:

$$\text{a) } \frac{\textcircled{1}}{6} + \frac{\textcircled{1}}{2}, \frac{\textcircled{1}}{6} + \frac{\textcircled{1}}{3}, \frac{\textcircled{1}}{6} - \frac{\textcircled{1}}{2};$$

$$\text{b) } \frac{\textcircled{1}}{2} - \frac{\textcircled{1}}{4}, \frac{\textcircled{1}}{2} + \frac{\textcircled{1}}{4}, \frac{\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{2};$$

$$\text{c) } \frac{\textcircled{1}}{3} - \frac{\textcircled{1}}{4}, \frac{\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{3}, \frac{\textcircled{1}}{3} + \frac{\textcircled{1}}{4}.$$

Estendiamo ora la nostra considerazione ad un ambiente in cui possiamo eseguire calcoli con tutti quanti i numeri esprimibili nella forma  $a/b$ , dove  $a, b$  designano oggetti di  $\mathcal{L}$  e  $b \neq 0$ . Fra gli oggetti del nuovo dominio troveremo, ad esempio, numeri designati da:

$$\frac{15}{16}, \frac{2\textcircled{1}}{7}, \frac{18}{\textcircled{1}^2}, \frac{\textcircled{1}^2}{5\textcircled{1}^4}.$$

Notiamo che non vi è un solo modo di designare il medesimo oggetto poichè, per esempio  $2/2 = 1 = \textcircled{1}/\textcircled{1}$  oppure  $2/4 = 1/2 = 3\textcircled{1}^2/6\textcircled{1}^2$ . Continuiamo in ogni caso, con leggero abuso terminologico, a parlare di numeri anche quando stiamo utilizzando una fra le possibili rappresentazioni numerali equivalenti del medesimo oggetto. Chiamiamo il nuovo ambiente numerico  $\mathcal{Q}$  e, come già annunciato, vi estendiamo le nostre tre Richieste. Per la Richiesta 2, ogni numero diverso da zero ha una inversa moltiplicativa. Ad esempio, il numero 2 ha l'inversa moltiplicativa  $1/2$ . Anche il numero  $\textcircled{1}$  deve avere un'inversa moltiplicativa, vale a dire  $1/\textcircled{1}$  tale che:

$$\textcircled{1} \cdot \frac{1}{\textcircled{1}} = \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{1}} = 1.$$

Per la Richiesta 1,  $n < \textcircled{1}$  vale per ogni numero esprimibile in base dieci. Per la Richiesta 2, vale la proprietà:

$$\text{se } 0 < x < y \text{ allora } \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

Questo significa che  $1/\textcircled{1} < 1/n$  per ogni  $n \neq 0$  esprimibile in base dieci. In particolare:

$$\frac{1}{\textcircled{1}} < \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Diciamo che il numero  $1/\textcircled{1}$  è un **infinitesimo** positivo.

**Definizione:** un numero positivo più piccolo di ogni frazione del tipo  $1/n$ , con  $n$  esprimibile in base dieci, è un *infinitesimo positivo*.

Dal momento che  $1/n = 2/2n$ , le nostre ultime osservazioni comportano che valga anche:

$$\frac{2}{\textcircled{1}} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \dots,$$

per cui troviamo che anche  $2/\textcircled{1}$ , l'inversa moltiplicativa della misura di  $\mathbb{N}_{0,2}$ , è un infinitesimo positivo. Chiamiamo numeri come  $-1/\textcircled{1}$  e  $-2/\textcircled{1}$  infinitesimi negativi.

**Esercizio 11.** Verificare le seguenti disuguaglianze, in cui  $n$  è esprimibile in base dieci:

$$(a) \frac{1}{\textcircled{1}^2} < \frac{1}{n\textcircled{1}}; (b) \frac{1}{\textcircled{1}^3} < \frac{1}{n\textcircled{1}^2}, (c) \frac{1}{\textcircled{1}^n} < \frac{1}{n\textcircled{1}^n}.$$

È possibile identificare un numero infinito di infinitesimi distinti. Ad esempio, i gross-one infinitesimi della forma  $1/\textcircled{1}^k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , sono tutti distinti. Vi sono inoltre infinitesimi più piccoli di un numero infinito di altri infinitesimi. Per esempio, l'infinitesimo  $1/\textcircled{1}^2$  è minore di  $\textcircled{1}^2 - (\textcircled{1} + 1) > \textcircled{1}$  altri infinitesimi della forma  $1/a$ , con  $a$  in  $\mathcal{N}$  (l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che  $[\textcircled{1}^2 - (\textcircled{1} + 1)] - \textcircled{1} = (\textcircled{1} - 1)^2 > 0$ ).

**Esercizio 12.** Elencare in una tabella i valori di  $a$  in  $\mathcal{N}$  per cui è soddisfatta la disuguaglianza  $1/\textcircled{1}^2 < 1/a$ . *Suggerimento:* distribuire l'elenco su righe di  $\textcircled{1}$  elementi ciascuna. L'ultima riga conterrà  $\textcircled{1} - 1$  elementi.

Di solito definiamo una frazione o numero razionale come un numero della forma  $m/n$ , in cui  $m, n$  sono numeri in  $\mathbb{Z}$ . La collezione dei numeri razionali è  $\mathbb{Q}$ . Da quanto precede vediamo che  $\mathbb{Q}$  è senz'altro una parte di  $\mathcal{Q}$ . Non è tuttavia agevole determinare una misura numerica per  $\mathbb{Q}$ , dal momento che non basta semplicemente contare tutte le possibili combinazioni di  $m$  e  $n$  in  $m/n$ , con  $n \neq 0$  (perché?). Risulta invece agevole stabilire se un determinato numero di  $\mathcal{Q}$  sia o meno in  $\mathbb{Q}$ . Per esempio, dal momento che  $1, 5, \textcircled{1}$  sono numeri diversi da zero e in  $\mathbb{N}$ , le frazioni  $\frac{1}{5}$  e  $1/\textcircled{1}$  sono entrambe in  $\mathbb{Q}$ . Vale la pena notare che l'infinitesimo  $1/|G1$ , essendo inesprimibile in base dieci, va considerato come un numero in  $\mathbb{Q}$  che risulta designabile nel sistema numerale in base  $\textcircled{1}$  ma non in base dieci.

Inoltre, poichè  $5①$  è un oggetto di  $\mathcal{N}$  maggiore di ogni numero in  $\mathbb{N}$ , esso non si trova nella collezione  $\mathbb{N}$ . Per questo motivo, la frazione  $1/5①$  è un infinitesimo positivo di  $\mathcal{Q}$  ma non di  $\mathbb{Q}$ . Inoltre, l'ambiente  $\mathcal{Q}$  ci permette di istituire una discriminazione tra ordini di infinitesimi, dal momento che, per  $n$  esprimibile in base dieci,  $1/①^n < 1/①$ , dove  $1/①^n$  non è in  $\mathbb{Q}$ .

**Esercizio 13.** Stabilire quali fra i seguenti termini indicano oggetti di  $\mathbb{Q}$ :

(a)  $\frac{①-1}{①}$ ; (b)  $1 - \frac{1}{①^2}$ ; (c)  $\frac{1}{①} + \frac{2}{①-2}$ ; (d)  $\frac{7①}{3}$ ; (e)  $\frac{0}{2①}$ .

Per finire, dobbiamo soltanto osservare che, data la Richiesta 2 relativamente a  $\mathcal{Q}$ , noi abbiamo a disposizione un calcolo aritmetico per questo ambiente che segue le usuali regole con cui si sommano e moltiplicano le frazioni.

**Esercizio 14.** Semplificare le seguenti espressioni:

a)  $\frac{1}{7} \left( \frac{①^2}{2} + \frac{①^2}{3} - \frac{①^2}{4} \right)$ ;

b)  $\left[ \left( \frac{①}{4} + \frac{1-①}{2①} \right) - \frac{①-2}{4} \right]$ ;

c)  $\left( \frac{①}{3} - \frac{①}{4} \right) \left( \frac{3}{①} + 6 + 3① \right)$ ;

d)  $\left[ \left( \frac{1}{①} + \frac{1}{①^2} - \frac{1-①^2}{①^3} \right) - \frac{3}{①} \left( \frac{1}{①} - \frac{3+①}{3①} \right) \right]$ ;

e)  $-\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{4①^2 - 3① - 1}{①^2} \right) \left( \frac{①}{①-1} - \frac{4①}{4①+1} \right) \right]$ .

## 2.7 Osservazioni conclusive

In questo capitolo abbiamo descritto un nuovo sistema numerale, introdotto da Yaroslav Segeyev, e abbiamo visto come utilizzarlo ai fini di un calcolo aritmetico applicato a collezioni finite e infinite di oggetti in vari domini numerici. Il nostro punto di partenza è stato l'ambiente esteso di interi positivi  $\mathcal{N}$ , che abbiamo in seguito voluto ampliare, in modo che ci fosse

possibile operare su numeri positivi e negativi ma anche, in ultima istanza, su frazioni. Per questo motivo siamo giunti fino all'ambiente esteso  $\mathcal{Q}$ . Il nostro ampliamento di ambiente numerico corrisponde alla disponibilità di un sistema numerale più espressivo, che ci permette di designare oggetti mediante un'opportuna notazione. In precedenza noi abbiamo illustrato questa notazione in riferimento al solo  $\mathcal{N}$ , ma possiamo estenderla alla considerazioni degli infinitesimi, introducendo le potenze negative di  $\textcircled{1}$ . Per esempio, nella notazione numerale adottata in 2.3.1, possiamo scrivere il termine:

$$\textcircled{1}^4 + \frac{3\textcircled{1}}{4} + 7 + \frac{2}{\textcircled{1}^2}$$

nella forma:

$$1 \cdot \textcircled{1}^4 0.75 \cdot \textcircled{1}^1 7 \cdot \textcircled{1}^0 2 \cdot \textcircled{1}^{-2}.$$

**Esercizio 15.** Scrivere nella notazione in base  $\textcircled{1}$  i seguenti termini:

(a)  $\frac{1}{\textcircled{1}}$ ; (b)  $1 - \frac{1}{\textcircled{1}^2}$ ; (c)  $\frac{3\textcircled{1}^2}{\textcircled{1}}$ ; (d)  $\frac{\textcircled{1} - 1}{2\textcircled{1}}$ .

Il lettore abituato al trattamento usuale degli insiemi numerici potrà rimanere sorpreso di fronte all'introduzione non solo di un nuovo sistema numerale, ma anche di oggetti come  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Q}$ , in cui sono soddisfatte le Richieste 1, 2, e 3. Da un punto di vista logico, l'introduzione di un oggetto come  $\mathcal{N}$  è stata presentata dal logico Gabriele Lolli in [15] e cenni su un modo di estendere i suoi risultati a costruzioni di  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Q}$  si possono trovare in [24].





## 3. Successioni e Serie

### 3.1 Successioni infinite

Avendo sviluppato un'aritmetica di quantità finite, infinitamente grandi e infinitamente piccole nel precedente capitolo, possiamo iniziare a studiarne le applicazioni. Il contesto applicativo che ci interessa è direttamente collegato al tipo di aritmetica di cui possiamo disporre. Poichè infatti ci avvaliamo non soltanto di un calcolo numerico, ma di un calcolo aritmetico di misure, e poichè queste misure ci permettono di determinare la lunghezza di collezioni infinite disposte ordinatamente (ad esempio  $\mathbb{N}, \mathbb{N}_{0,2}, \mathbb{Z}$ ), la nostra attenzione si rivolgerà anzitutto allo studio delle successioni infinite.

Di solito si affrontano le successioni infinite dopo avere acquisito familiarità con l'aritmetica tradizionale, che coinvolge soltanto quantità finite. Ma la restrizione a tali quantità non offre strumenti adeguati ad uno studio delle successioni infinite. Per questo motivo si rende necessario introdurre il concetto di limite, in modo da poter coordinare lo studio di oggetti infiniti con un calcolo ristretto al finito. Nel nostro caso, non abbiamo bisogno di seguire questo percorso. Infatti, tutto il lavoro svolto sull'aritmetica nel capitolo precedente ci conduce allo studio delle successioni infinite mentre siamo già in possesso di un calcolo aritmetico adeguato al nostro oggetto di studio. Perciò non abbiamo bisogno di introdurre il concetto di limite per sviluppare i risultati che seguiranno.

Il nostro punto di partenza non è dunque la definizione di limite ma la de-

finizione di una **successione completa**. Nel sistema numerale in base dieci discusso precedentemente, una successione infinita è di solito descritta contandone gli elementi, così:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots,$$

senza che se ne possa misurare la lunghezza ma presupponendo che vi siano tanti elementi quanti sono gli oggetti in  $\mathbb{N}$ . Operando tuttavia soltanto con numerali finiti, diviene possibile, ad esempio, cancellare tutti gli elementi di indice dispari ed ottenere la nuova successione infinita:

$$a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}, a_{2n+2}, \dots$$

che, quanto a lunghezza, risulta indistinguibile dalla successione iniziale. Se inoltre valesse  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots$ , le due successioni sarebbero del tutto indistinguibili, non solo rispetto alla lunghezza. Per il Principio Euclideo, devono tuttavia essere distinte. Dal punto di vista dell'aritmetica dell'infinito, è possibile assegnare determinazioni numeriche distinte alle loro lunghezze. A questo scopo, conviene introdurre la definizione seguente:

**Definizione** una successione infinita di numeri è completa se, e solo se, ha lunghezza  $\textcircled{1}$ .

Questo vuol dire che, in particolare, la successione:

$$1, 2, 3, \dots, \frac{\textcircled{1}}{2} - 1, \frac{\textcircled{1}}{2}, \frac{\textcircled{1}}{2} + 1, \dots, \textcircled{1} - 2, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}$$

è una successione completa. In generale, indicheremo una successione completa con la notazione:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\textcircled{1}-2}, a_{\textcircled{1}-1}, a_{\textcircled{1}},$$

dove  $a_1$  è il primo elemento della successione,  $a_2$  il secondo, e così via. Notiamo che i termini della successione completa  $1, 2, \dots, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}$  sono descritti dalle condizioni:

$$a_i = i \quad \text{e} \quad i = 1, 2, 3, \dots, \textcircled{1} - 2, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}.$$

Possiamo quindi descrivere alcune successioni complete specificandone la lunghezza e la forma del termine generico  $a_i$ . Un altro esempio di successione completa è dato da:

$$a_i = 2i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \textcircled{1} - 2, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}.$$

Scritta per esteso, la successione così definita è:

$$2, 4, 6, \dots, 2\textcircled{1} - 4, 2\textcircled{1} - 2, 2\textcircled{1}.$$

Se avessimo modificato le condizioni date, accorciando la successione appena descritta nel modo seguente:

$$a_i = 2i ; i = 1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}/2 - 1, \textcircled{1}/2,$$

avremmo ottenuto:

$$2, 4, 6, \dots, \textcircled{1} - 2, \textcircled{1},$$

vale a dire la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$ , che non è dunque una successione completa.

**Esercizio 16.** Scrivere i primi e gli ultimi tre elementi delle seguenti successioni, indicando se si tratti di successioni complete o meno:

a)  $a_i = 2i - 1 ; i = 1, 2, \dots, \textcircled{1}.$

b)  $\mathbb{N}_{1,2}.$

c)  $a_i = \textcircled{1} - i ; i = 0, 1, 2, \dots, \textcircled{1} - 1.$

d)  $a_i = \frac{1}{i^2} ; i = \frac{\textcircled{1}}{2}, \frac{\textcircled{1}}{2} + 1, \dots, 3\frac{\textcircled{1}}{2}.$

e)  $a_i = \frac{3i}{4} ; i = -\frac{\textcircled{1}}{3}, -\frac{\textcircled{1}}{3} + 1, \dots, \frac{2\textcircled{1}}{3} - 1, \frac{2\textcircled{1}}{3}.$

Ci sono due modi in cui una successione può non essere completa. O essa è più breve di una successione completa, o è più lunga. Chiamiamo *successioni estese* le successioni più lunghe di una successione completa. Ad esempio, la successione:

$$0, 1, 2, 3, \dots, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}, \textcircled{1} + 1, \dots, 2\textcircled{1} - 1, 2\textcircled{1}$$

è una successione estesa di lunghezza  $2\textcircled{1} + 1$ , la stessa lunghezza della

successione estesa  $\mathbb{Z}$ .

**Esercizio 17.** Descrivere le seguenti successioni elencandone i tre termini iniziali, i tre termini finali e tre termini intermedi. Determinare inoltre la lunghezza di ciascuna successione e stabilire quindi se si tratti di una successione estesa:

- a)  $\mathbb{N}_{1,2}$  seguito da  $\mathbb{N}_{1,3}$  e poi da  $\mathbb{N}_{2,3}$ .
- b)  $\mathbb{N}_{0,6}$  preceduto da  $\mathbb{N}_{0,2}$  e seguito dalla successione  $a_i = \textcircled{1}i$ ;  $i = 3, 4, \dots, \frac{\textcircled{1}}{2}$ .
- c)  $a_i = \textcircled{1} - i$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, \textcircled{1}$ .
- d)  $a_i = 1/2^i$ ;  $i = -\textcircled{1}, -\textcircled{1} + 1, \dots, \textcircled{1} - 2, \textcircled{1} - 1$ .
- e)  $a_i = 3i$ ;  $i = -\frac{\textcircled{1}}{3}, -\frac{\textcircled{1}}{3} + 1, \dots, \frac{\textcircled{1}}{3}$ .

Concludiamo con alcune brevi osservazioni per il lettore che abbia già affrontato il concetto di limite. In questo contesto, una successione generica è di solito rappresentata nel modo seguente:

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

dove s'intende che gli indici dei suoi termini assumano tutti i valori in  $\mathbb{N}$ . Si tratta cioè di successioni complete, rappresentate tuttavia senza poterne specificare numericamente la lunghezza. È dunque naturale aspettarsi che le caratteristiche di successioni complete distinte risultino indistinguibili numericamente. Ad esempio, il limite, per  $n$  che tende a infinito, di ciascuna fra le due successioni:

$$a_i = \frac{1}{i}; i = 1, 2, 3, \dots \text{ e } b_i = \frac{1}{i^2}; i = 1, 2, 3, \dots$$

è uguale a zero. Tuttavia, quando le rispettive lunghezze di queste successioni vengano specificate e, in particolare, si considerino entrambe come successioni complete, diviene possibile determinare l'ultimo termine numerico di ciascuna. Abbiamo  $a_{\textcircled{1}} = 1/\textcircled{1}$  e  $b_{\textcircled{1}} = 1/\textcircled{1}^2$ . Quindi  $a_{\textcircled{1}}, b_{\textcircled{1}}$  sono entrambi infinitesimi positivi, ma il secondo è strettamente minore del primo. Possiamo pensare all'operazione di passaggio al limite come un metodo di stima per una successione completa, che non è più accurato del grado di discriminazione fra termini numerici consentito dall'adozione di

un sistema numerale come quello in base dieci. Analoghe considerazioni si applicano alle successioni:

$$a_i = i; i = 1, 2, 3, \dots \text{ e } b_i = i^2; i = 1, 2, 3, \dots$$

Ciascuna di queste successioni è divergente, come si esprime nella notazione:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \infty = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i.$$

Rispetto ad un sistema numerale in grado di designare soltanto quantità finite, l'uso di  $\infty$  indica una valutazione generica di ciascuna successione. Qualora le si prenda come successioni complete, si vede che:

$$a_{\textcircled{1}} = \textcircled{1} < \textcircled{1}^2 = b_{\textcircled{1}}.$$

Non solo ciascuna successione termina con un numero infinitamente grande, ma la differenza fra i due punti terminali, vale a dire  $\textcircled{1}^2 - \textcircled{1}$ , è essa stessa infinitamente grande. Il passaggio al limite identifica quindi due livelli di infinito notevolmente differenti. Grazie all'impiego  $\textcircled{1}$ , siamo in grado sia di determinarli che di calcolare la loro differenza.

### Esercizio 18.

- Si consideri la successione completa  $a_i = \frac{i}{2}; i = 1, 2, \dots, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}$ . Quanti numeri pari di  $\mathbb{N}$  contiene? Quanti dispari?
- Descrivere una successione completa che non contenga infinitesimi, abbia come ultimo termine 0 e contenga soltanto numeri interi.
- Una successione completa si dice decrescente quando soddisfa le disuguaglianze:  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{\textcircled{1}-1} \geq a_{\textcircled{1}}$ . Descrivere una successione completa decrescente i cui termini siano tutti infinitesimi e tale che  $a_{\textcircled{1}} = 0$ .
- Descrivere due successioni i cui ultimi termini  $a_{\textcircled{1}}$  e  $b_{\textcircled{1}}$  siano entrambi infinitamente grandi e abbiano differenza infinitesima.
- Determinare l'ultimo termine di:  $a_i = (-1)^i; i = 1, 2, \dots, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}$  e di  $a_i = (-1)^i; i = 1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}/3 - 1$ .

### 3.1.1 Successioni complete di caselle

Prima di dedicarci a sommare i termini di una successione completa, il tema centrale della prossima sezione, vale la pena prendere in esame non più una successione completa di termini numerici come:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

ma una successione completa di caselle vuote, alle quali sono assegnati indici numerici, che possiamo descrivere così:

$$\square_1, \square_2, \square_3, \square_4, \square_5, \square_6, \dots, \square_{n-4}, \square_{n-3}, \square_{n-2}, \square_{n-1}, \square_n.$$

Avere a disposizione caselle vuote, che possono essere occupate da termini numerici secondo varie regole, ci permette di rendere evidente un'ulteriore differenza tra lo studio delle successioni mediante un sistema numerale come quello in base dieci ed il loro studio mediante l'aritmetica dell'infinito. Nel primo caso noi siamo in grado di prendere in esame soltanto un numero finito di caselle in testa ad una successione completa. Per questo motivo certe operazioni ci sembrano sempre effettuabili. Immaginiamo ad esempio di avere le caselle:

$$\square_1, \square_2, \square_3, \square_4, \square_5, \square_6, \dots$$

e di poterle riempire facendo uso dei termini numerici nella successione:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

secondo una procedura che ci accingiamo a descrivere. In primo luogo, nelle caselle vuote il cui indice è un multiplo di 4, inseriamo gli  $a_i$  con indice pari. In secondo luogo, inseriamo nelle restanti caselle di indice pari gli  $a_i$  con indice dispari. Il risultato di queste operazioni è:

$$\square_1, a_1, \square_3, a_2, \square_5, a_3, \dots$$

Se avessimo sostituito ogni  $a_i$  con una casella vuota, avremmo ottenuto la successione iniziale di caselle vuote. Possiamo dire che la successione di termini  $a_i$  e la successione di caselle vuote abbiano lo stesso numero di termini. D'altra parte, seguendo la nostra procedura, ci sembra che la successione di termini  $a_i$  occupi soltanto metà delle caselle vuote nella successione iniziale. Ci sembra di poter concludere che le due successioni considerate abbiano e non abbiano ad un tempo lo stesso numero di termini. Il fatto è che noi riteniamo di poter portare a compimento processi infiniti (il riempimento di caselle vuote) di cui non siamo d'altra parte in grado di descrivere numericamente il completamento.

Consideriamo ora lo stesso problema in riferimento ad una successione completa di caselle vuote e alla successione completa:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

In questo caso, la prima operazione richiede che consideriamo la collezione degli  $a_i$  di indice pari. Ce ne sono  $\mathbb{1}/2$ . Dobbiamo sistemare questi oggetti nelle caselle il cui indice sia un multiplo di quattro, vale a dire nelle caselle con indice in  $\mathbb{N}_{0,4}$ . Le caselle vuote disponibili sono  $\mathbb{1}/4$ , quindi possiamo soltanto fare uso dei primi  $\mathbb{1}/4$  termini  $a_i$  di indice pari. Ora, questi termini sono:

$$a_2, a_4, \dots, a_{\mathbb{1}/2}$$

e la loro inserzione nelle caselle vuote produce il seguente risultato:

$$\square_1, \square_2, \square_3, a_2, \square_5, \square_6, \dots, a_{\frac{\mathbb{1}}{2}-1}, \square_{\mathbb{1}-3}, \square_{\mathbb{1}-2}, \square_{\mathbb{1}-1}, a_{\frac{\mathbb{1}}{2}}.$$

Poichè abbiamo utilizzato  $\mathbb{1}/4$  caselle di indice pari, ce ne rimangono soltanto altre  $\mathbb{1}/4$ . È in queste caselle che dobbiamo collocare i primi  $\mathbb{1}/4$   $a_i$  di indice dispari. Questi sono:

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{\frac{\mathbb{1}}{2}-3}, a_{\frac{\mathbb{1}}{2}-1}.$$

Il loro inserimento nelle caselle pari non occupate conduce a:

$$\square_1, a_1, \square_3, a_2, \square_5, a_3, \dots, \square_{\mathbb{1}-3}, a_{\frac{\mathbb{1}}{2}-1}, \square_{\mathbb{1}-1}, a_{\frac{\mathbb{1}}{2}}.$$

Delle caselle vuote iniziali,  $\mathbb{1}/2$  rimangono vuote, mentre le restanti sono riempite da  $\mathbb{1}/4$  numeri pari e da  $\mathbb{1}/4$  numeri dispari. Queste differenze non potevano esserci visibili mentre consideravamo soltanto la parte iniziale di successioni semplicemente senza fine. Mentre è legittimo dire che, data una successione, la sostituzione di tutti i suoi termini con caselle vuote deve condurre ad una successione di sole caselle vuote, è azzardato credere che dislocare i termini di indice pari e dispari in una successione secondo le regole descritte sopra conduca al medesimo esito.

**Esercizio 19.** Si consideri una successione completa di caselle vuote. Si inseriscano gli elementi di  $\mathbb{N}_{0,3}$  ordinatamente nelle caselle di indice pari. Successivamente, si inseriscano gli elementi di  $\mathbb{N}_{1,3}$  ordinatamente nelle caselle di indice dispari a partire da  $a_{\mathbb{1}/4-1}$ . Si descriva il risultato di queste operazioni e si individuino i blocchi infinitamente lunghi di caselle consecutive vuote, specificandone la lunghezza.

### 3.2 Serie Infinite

Data una successione infinita di lunghezza data, il modo più semplice di operare aritmeticamente su di essa consiste nel calcolare la somma dei suoi termini. Data, per esempio la successione completa:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n,$$

si può calcolare il valore numerico della sommatoria infinita:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Chiamiamo l'ultima espressione la *serie infinita associata alla successione infinita*  $a_1, \dots, a_n$ . Il suo valore numerico è la *somma della serie*. Nella parte restante di questo capitolo descriveremo una serie sia nella notazione appena utilizzata che nella notazione:

$$\sum_{i=1}^k a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$$

dove il simbolo 'Σ', cioè la lettera greca 'sigma' maiuscola, indica una sommatoria che coinvolge  $k$  termini consecutivi, da  $a_1$  fino ad  $a_k$ . Qui  $k$  indica un numero in  $\mathcal{L}$ .

Esiste uno stretto legame tra successioni infinite e serie. Poichè infatti gli addendi di una serie infinita sono i termini di una successione infinita, ci basta specificare una successione infinita di termini per determinare la corrispondente serie infinita. Se la successione in questione è completa, chiamiamo la serie infinita corrispondente una *serie completa*. Se, invece, si tratta di una successione estesa, chiamiamo la serie infinita corrispondente una *serie estesa*. Infine, una successione infinita costante determina la corrispondente *serie infinita costante*. Una successione infinita è costante quando tutti i suoi termini sono uguali. In particolare, la seguente successione completa:

$$\underbrace{a, a, a, a, \dots, a, a}_{\textcircled{1} \text{ volte}}$$

determina la serie infinita completa:

$$\underbrace{a + a + a + a + \dots + a + a}_{\textcircled{1} \text{ volte}}$$



la cui somma è  $\textcircled{1}a$ . Quando una successione (completa o meno) è costante, chiamiamo  $a$  il suo *coefficiente*.

**Esercizio 20.**

- a) Calcolare la somma delle serie complete costanti di coefficienti 3, 4, 10 rispettivamente. Calcolare inoltre le differenze positive tra queste somme.
- b) Data la successione costante di coefficiente 2 e lunghezza  $15\textcircled{1}$ , calcolare la somma della serie infinita estesa corrispondente.
- c) Data la successione completa di coefficiente 1, sia  $s$  la serie completa corrispondente. Trovare una serie completa  $t$  tale che  $t + s = -1$ .
- d) Data una successione costante di coefficiente  $\textcircled{1}/2$  e lunghezza  $\textcircled{1}/3$ , calcolare la somma della serie infinita corrispondente.

Notiamo che, adottando soltanto numerali esprimibili in base dieci, non è possibile distinguere tra successioni costanti di lunghezza differente. L'unico modo di rappresentare una successione infinita costante di coefficiente  $a$  è:

$$a, a, a, a, \dots$$

e la serie infinita associata non ha somma. Nella notazione usuale, alla somma di questa serie si assegna il simbolo  $\infty$ . Questo risultato è indipendente dal valore numerico di  $a$ . D'altro canto, grazie all'aritmetica dell'infinito noi possiamo esprimere il numero di termini in una successione infinita costante o, equivalentemente, determinarne la lunghezza, e calcolare così la somma della serie infinita corrispondente. Ciò significa che, date due successioni costanti di cui una sia estensione dell'altra, in assenza dell'aritmetica dell'infinito risulta impossibile distinguere le somme delle serie infinite associate. Ciò vale anche se le successioni sono costanti e della medesima lunghezza ma hanno coefficienti distinti, oppure se hanno coefficienti costanti e la differenza tra le loro lunghezze è non nulla. Per esempio, dati i coefficienti 3, 7, noi possiamo soltanto considerare, limitandoci all'esprimibilità in base dieci, le due successioni costanti:

$$3, 3, 3, \dots \quad \text{e} \quad 7, 7, 7, \dots$$

Le serie costanti associate hanno entrambe somma  $\infty$ . Se, d'altra parte, adottiamo come strumento di calcolo l'aritmetica dell'infinito, possiamo effettuare numerose distinzioni.

**Esempio 6.** Specificare le lunghezze di una successione infinita  $s$  di coefficiente 3 ed una successione infinita  $t$  di coefficiente 7 in modo che: (a) la somma della serie associata a  $s$  sia minore della somma della serie associata a  $t$ ; (b) la somma della serie associata a  $s$  sia maggiore della somma della serie associata a  $t$ ; (c) la somma della serie associata a  $s$  sia uguale a quella della serie associata a  $t$ .

**Soluzione:** Per quanto riguarda (a) si possono prendere due successioni complete, entrambe di lunghezza  $\textcircled{1}$ . In questo caso la somma della serie associata a  $s$  è  $3\textcircled{1}$  e quella della serie associata a  $t$  è  $7\textcircled{1} > 3\textcircled{1}$ . Si ottiene una risposta a (b) scegliendo ad esempio  $3\textcircled{1}$  come lunghezza di  $s$  e  $\textcircled{1}$  come lunghezza di  $t$ . In questo caso, la somma della serie associata a  $s$  è  $9\textcircled{1} > 7\textcircled{1}$ . Infine, la richiesta di (c) può essere soddisfatta assegnando lunghezza  $\textcircled{1}/6$  a  $s$  e lunghezza  $\textcircled{1}/14$  a  $t$ .

**Esercizio 21.** Specificare le lunghezze di una successione infinita  $s$  di coefficiente  $-2$  ed una successione infinita  $t$  di coefficiente 1 in modo che:

- a) le somme delle serie associate a  $s, t$  rispettivamente siano valori numerici  $x, y$  tali che  $x + y = 0$ ;
- b) le somme delle serie associate a  $s, t$  rispettivamente siano valori numerici  $x + y$  tali che  $x + y < 0$ ;
- c) le somme delle serie associate a  $s, t$  rispettivamente siano valori numerici  $x + y$  tali che  $x + y > 0$ .

I calcoli svolti finora sono molto elementari e riguardano serie particolarmente semplici. È tuttavia notevole che, in assenza di risorse numerali adeguate, essi risultino impraticabili e ci costringano a trattare molte situazioni distinte come identiche.

### 3.2.1 Serie Aritmetiche

I termini che contano  $\mathbb{N}$  determinano la successione completa:

$$1, 2, 3, 4, \dots, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}.$$

Vogliamo calcolare la somma della serie associata, vale a dire:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{1}} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \textcircled{1} - 1 + \textcircled{1}.$$

Possiamo riuscirci sfruttando un'idea attribuita al matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Procediamo disponendo i termini della successione lungo due righe, come segue:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \textcircled{1}; \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} - 1 & \textcircled{1} - 2 & \textcircled{1} - 3 & \dots & 1. \end{array}$$

È facile sommare tutti i  $2\textcircled{1}$  termini considerati: infatti, ciascuna coppia di numeri incolonnati ha somma  $\textcircled{1} + 1$  e ci sono  $\textcircled{1}$  colonne. La somma di tutti i termini è dunque  $\textcircled{1}(\textcircled{1} + 1)$ . D'altro canto, la somma che interessa coinvolge soltanto  $\textcircled{1}$  termini. Poiché tuttavia ogni termine nella prima successione completa occorre nuovamente, ed una sola volta, nella seconda, la somma dei  $\textcircled{1}$  termini in una sola fra le due successioni complete dev'essere la metà della somma totale  $\textcircled{1}(\textcircled{1} + 1)$ . Si ottiene così:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{1}} i = 1 + 2 + \dots + (\textcircled{1} - 1) + \textcircled{1} = \frac{\textcircled{1}(\textcircled{1} + 1)}{2}.$$

### Esercizio 22.

- Calcolare la somma  $1 + 2 + 3 + \dots + 34 + 35$ ;
- Calcolare la somma della serie  $1 + 2 + 3 + \dots + \left(\frac{\textcircled{1}}{2} - 1\right) + \frac{\textcircled{1}}{2}$ ;
- Calcolare la somma della serie  $1 + 2 + 3 + \dots + \left(\frac{\textcircled{1}}{3} - 2\right) + \left(\frac{\textcircled{1}}{3} - 1\right)$ .
- Calcolare la somma della serie completa di numeri pari:  $2 + 4 + 6 + \dots + 2\textcircled{1} - 2 + 2\textcircled{1}$  (*Suggerimento*: descrivere ciascun termine come una somma di termini uguali).
- Sfruttare la tecnica adottata per sommare i termini che contano  $\mathbb{N}$  per calcolare la somma dei numeri pari in  $\mathbb{N}$ .
- Determinare la somma della serie associata alla successione dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$ .

Conoscendo la somma della serie infinita  $1 + 2 + \dots + (\textcircled{1} - 1) + \textcircled{1}$ , possiamo determinare altre somme di serie infinite agevolmente. Vogliamo concentrarci sulle serie determinate da **progressioni aritmetiche** complete. Una progressione aritmetica completa è una successione di  $\textcircled{1}$  termini ottenuta da un termine iniziale fissato per aggiunte successive del medesimo incremento. Se il termine iniziale si chiama  $a$  e l'incremento  $d$ , la progressione aritmetica completa con termine iniziale  $a$  ed incremento  $d$  consta dei termini:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (\textcircled{1} - 2)d, a + (\textcircled{1} - 1)d.$$

Chiamiamo questa successione  $A_{a,d}$ . La serie corrispondente è:

$$\sum_{i=0}^{\textcircled{1}-1} a + id = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + (a + (\textcircled{1} - 2)d) + (a + (\textcircled{1} - 1)d).$$

Assumiamo ora (ne offriremo una giustificazione al termine di questa sezione) che i termini della sommatoria infinita appena descritta possano essere riordinati senza che il valore numerico della loro somma ne risulti alterato. In questo caso possiamo trasformare la somma precedente in:

$$\underbrace{(a + a + a + \dots + a)}_{\textcircled{1} \text{ volte}} + d(1 + 2 + 3 + \dots + (\textcircled{1} - 1)) = \textcircled{1}a + \frac{d\textcircled{1}}{2}(\textcircled{1} - 1).$$

**Esercizio 23.** Calcolare le somme delle serie associate alle seguenti progressioni aritmetiche complete:  $A_{1,2}, A_{2,2}, A_{1,3}, A_{2,3}, A_{3,3}, A_{\textcircled{1},4}, A_{2,\textcircled{1}/3}$ .

Se una progressione aritmetica non è completa, ma è una successione estesa o con meno di  $\textcircled{1}$  termini, la somma della serie corrispondente è ancora calcolabile senza difficoltà. Indichiamo con  $\lambda$  la lunghezza della progressione. La somma dei suoi termini si riduce alla forma:

$$a\lambda + d(1 + 2 + 3 + \dots + (\lambda - 1)).$$

A questo punto, la tecnica introdotta per determinare la somma della successione completa  $1, 2, \dots, \textcircled{1}$  permette di pervenire al risultato:

$$1 + 2 + 3 + \dots + \lambda = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2}.$$

**Esercizio 24.**

- a) Giustificare l'ultima uguaglianza;
- b) Calcolare la somma della serie associata alla successione  $\mathbb{N}_{0,4}$ ;
- c) Calcolare la somma della serie associata alla successione  $\mathbb{N}_{1,5}$ .

Finora abbiamo considerato successioni di termini positivi. Vogliamo ora prendere in considerazione anche termini negativi. In particolare, ci interessa studiare successioni in cui si alternano segni positivi e negativi. Le serie corrispondenti si chiamano *serie alternate*. Faremo anzitutto riferimento a successioni complete. Iniziamo dal caso più semplice, della forma:

$$\underbrace{a, -a, a, \dots, -a, a, -a}_{\textcircled{1} \text{ volte}}$$

Calcoliamo ora la somma della serie alternata corrispondente. Poichè stiamo lavorando con una successione completa, essa contiene  $\textcircled{1}/2$  termini positivi e  $\textcircled{1}/2$  termini negativi. La somma dei termini positivi è  $a\textcircled{1}/2$ , quella dei termini negativi  $-a\textcircled{1}/2$ . Quindi, la somma della serie è 0. Un modo leggermente diverso di ottenere il medesimo risultato consiste nello scrivere la serie che ci interessa nel modo seguente:

$$\underbrace{(a - a) + (a - a) + \dots + (a - a)}_{\textcircled{1}/2 \text{ volte}}$$

e notare che  $\textcircled{1}$  è divisibile per 2. Ci sono quindi esattamente  $\textcircled{1}/2$  addendi  $(a - a) = 0$  e la serie si riduce ad una somma infinita di lunghezza  $\textcircled{1}/2$  in

cui ogni addendo è zero.

**Esercizio 25.** La successione completa che inizia con il termine 1 e in cui si alternano 1 e  $-1$  determina la *serie di Grandi*  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$  (dal nome del matematico Luigi Guido Grandi (1671–1742)).

- Calcolare la somma della serie di Grandi.
- Quali estensioni della serie di Grandi hanno la stessa somma della serie di Grandi? Quali hanno somma diversa?
- Calcolare la somma dei primi  $\frac{2\textcircled{1}}{3} - 7$  termini della serie di Grandi.

Chiamiamo ora  $A'_{a,d}$  la progressione aritmetica alternata ottenuta da  $A_{a,d}$  prendendone i termini di posto pari con segno negativo. Ad esempio,  $A'_{1,1}$  è la progressione aritmetica  $1, -2, 3, -4, \dots, \textcircled{1} - 1, -\textcircled{1}$ . Possiamo, come in precedenza, sfruttare la somma della serie alternata determinata da  $A'_{1,1}$  per determinare la somma di ogni altra serie alternata determinata da un progressione del tipo  $-A_{a,d}$ . Infatti, per calcolare:

$$a + (-a - d) + (a + 2d) + (-a - 3d) + \dots + (-a - (\textcircled{1} - 1)d)$$

ci basta riordinare i termini della serie in modo da ottenere:

$$\underbrace{a - a + a - a + \dots + a - a}_{\textcircled{1} \text{ volte}} - d(1 - 2 + 3 - 4 + \dots + \textcircled{1} - 1) =$$

$$-d(1 - 2 + 3 - 4 + \dots + \textcircled{1} - 1) = -d \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} i.$$

La somma della serie alternata fra parentesi non è troppo difficile da calcolare. La si ottiene ad esempio considerando la corrispondente serie alternata completa:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + \textcircled{1} - 1 - \textcircled{1},$$

che ha per somma la differenza tra la somma dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$  e la somma dei numeri pari in  $\mathbb{N}$ . Associando le  $\textcircled{1}/2$  coppie consecutive di termini in questa serie, si vede che hanno tutte lo stesso valore, cioè  $-1$ . La somma della serie è dunque  $-\textcircled{1}/2$  e la somma che ci interessa è  $-\textcircled{1}/2 + \textcircled{1} = \textcircled{1}/2$ . Otteniamo quindi:

$$-d \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} i = -d \frac{\textcircled{1}}{2}.$$

Osserviamo che, per qualsiasi valore intero di  $d$ ,  $-d\frac{\textcircled{1}}{2}$  non è esprimibile in base dieci e che, restringendosi a questo sistema numerale, non è possibile associare un valore determinato alla serie alternata  $a - a + a - \dots$ , di cui non si può esprimere numericamente la lunghezza. In altre parole, le serie alternate con un incremento intero, come già le serie infinite considerate in precedenza, generano problemi di calcolo numerico notevoli, fintanto che non si faccia appello alle risorse numerali offerte dall'aritmetica dell'infinito.

### Esercizio 26.

- a) Ottenere la somma della serie alternata associata a  $A'_{1,1}$  sfruttando l'Esercizio 22, parti (e) ed (f).
- b) Calcolare la somma delle serie alternate associate a  $A'_{2,1}$  e  $A'_{1,3}$ .
- c) La somma di due successioni complete  $a_1, \dots, a_n$  e  $b_1, \dots, b_n$  è  $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$ . Inoltre, se  $A$  è la successione completa  $a_1, \dots, a_n$ , allora  $-A$  è la successione completa  $-a_1, \dots, -a_n$ .
  - Determinare le successioni complete  $A_{1,2} + A'_{2,3}$ ,  $A_{2,2} + A'_{1,3}$  e  $A'_{1,2} - A_{3,1}$ .
  - Calcolare la somma delle serie corrispondenti a ciascuna delle precedenti successioni.
  - Calcolare la somma della serie corrispondente alla successione  $-(A_{1,1} - A'_{2,2} + A'_{2,3})$ .
- d) Calcolare la somma della serie alternata dei numeri pari in  $\mathbb{N}$ .
- e) Calcolare la somma della serie alternata dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$ .

## 3.2.2 Serie con Infinitesimi

Tutti gli esempi di serie infinite discussi in precedenza sono soggetti alla limitazione che gli addendi della serie siano numeri in  $\mathcal{L}$ . Questa limitazione non è necessaria, poichè è possibile sommare numeri in  $\mathcal{Q}$  senza problemi. Un caso di particolare interesse riguarda le serie infinite di infinitesimi in  $\mathcal{Q}$ . Per esempio, fissando  $a = 1/\textcircled{1}$ , la successione completa di coefficiente  $a$  determina la serie:

$$\underbrace{\frac{1}{\textcircled{1}} + \dots + \frac{1}{\textcircled{1}}}_{\textcircled{1} \text{ volte}} = 1,$$

la cui somma è un numero finito, benchè i suoi addendi siano tutti infinitamente piccoli.

**Esercizio 27.**

- a) Determinare la lunghezza di una successione costante di coefficiente  $1/\textcircled{1}^2$  la cui serie corrispondente abbia somma minore di  $1/n$ , con  $n$  esprimibile in base dieci.
- b) Determinare la lunghezza di una successione costante di coefficiente  $1/\textcircled{1}$  la cui serie corrispondente abbia somma maggiore di  $\textcircled{1}$ .
- c) Trovare una successione costante di coefficiente infinitesimo la cui serie corrispondente abbia somma infinitesima.
- d) Stabilire la lunghezza di un'estensione della successione costante in (c) la cui serie corrispondente abbia somma maggiore di  $\textcircled{1}$ .
- e) Determinare una successione completa priva di termini infinitamente grandi la cui serie corrispondente abbia somma  $(\textcircled{1} + 1)2$ .
- f) Determinare una successione completa priva di termini infinitamente grandi la cui serie corrispondente abbia somma  $\textcircled{1}/4$ .

La sezione 3.2.1 ci permette di introdurre infinitesimi in serie di cui sappiamo già come calcolare la somma. Consideriamo in particolare la progressione aritmetica completa  $A_{a,d}$ . La somma della serie corrispondente non dipende da particolari restrizioni sul dominio di  $a, d$  quindi, sebbene ci siamo limitati a scegliere  $a, d$  da  $\mathcal{N}$ , possiamo anche sceglierli da  $\mathcal{Q}$ . Consideriamo ad esempio  $A_{1,2/\textcircled{1}}$ . La serie corrispondente ha somma:

$$\sum_{i=0}^{\textcircled{1}-1} 1 + \frac{2i}{\textcircled{1}} = \textcircled{1} + (\textcircled{1} - 1) = 2\textcircled{1} - 1.$$



Se  $a = 1/\textcircled{1}$  e  $d = 2/\textcircled{1}$ , la somma della serie associata a  $A_{a,d} = A_{\frac{1}{\textcircled{1}}, \frac{2}{\textcircled{1}}}$  è, come si verifica senza difficoltà, uguale a 1.

**Esercizio 28.**

- Determinare  $a, d$  positivi tali che la somma della serie associata a  $A_{a,d}$  sia più piccola di  $1/\textcircled{1}^3$ .
- Calcolare la somma della serie associata all'estensione di  $A_{\frac{1}{\textcircled{1}}, \frac{1}{\textcircled{1}^2}}$  la cui lunghezza è  $\textcircled{1}^3$ .
- Calcolare la somma della serie associata a  $A'_{1, \frac{2}{\textcircled{1}}}$ .
- Calcolare la somma della serie associata a  $A'_{\frac{2}{\textcircled{1}}, \frac{2}{\textcircled{1}}}$ .
- Calcolare la somma della serie associata a  $A'_{\frac{1}{\textcircled{1}}, \frac{1}{\textcircled{1}^4}}$ .

### 3.2.3 Serie Geometriche

Consideriamo ora una famiglia notevole di successioni, a cui possiamo associare serie calcolabili. Per  $a > 0$ , la successione completa:

$$a, a^2, a^3, \dots, a^{\textcircled{n}-1}, a^{\textcircled{n}}$$

delle prime  $\textcircled{1}$  potenze positive di  $a$  è una *progressione geometrica completa di ragione  $a$* , dal momento che il rapporto di due termini consecutivi è  $a$ . A tale progressione è associata la **serie geometrica completa**:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{n}} a^i = a^1 + a^2 + \dots + a^{\textcircled{n}}.$$

Se assumiamo  $a \neq 1$  e chiamiamo  $S$  la somma di tale serie, è facile vedere che  $aS = S - a + a^{\textcircled{n}+1}$ , da cui segue che:

$$S = \frac{a^{\textcircled{n}+1} - a}{a - 1} = \frac{a}{a - 1}(a^{\textcircled{n}} - 1).$$

Applichiamo questo risultato al caso in cui  $a = \textcircled{1}$ . In questo caso:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{n}} \textcircled{1}^i = \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{1} - 1}(\textcircled{1}^{\textcircled{n}} - 1).$$

Se, d'altro canto  $a = 1/\textcircled{1}$ , otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{1}} \left( \frac{1}{\textcircled{1}} \right)^i = \frac{1}{1 - \textcircled{1}} \left( \frac{1}{\textcircled{1}^{\textcircled{1}}} - 1 \right),$$

che è il prodotto di due fattori di segno negativo ed è dunque un numero positivo, come dobbiamo aspettarci dalla somma di una serie a termini positivi.

**Esercizio 29.**

- a) Data una progressione geometrica completa di ragione  $a$ , sia  $S$  la somma della serie geometrica corrispondente. Calcolare  $S/a$  e determinare il valore di  $S$ .
- b) Data la progressione geometrica  $a_i = 1/2^i$ ;  $i = 1, 2, \dots, \textcircled{1}$ , determinare la somma della serie geometrica corrispondente.
- c) Calcolare  $\sum_{i=1}^{\textcircled{1}} \frac{1}{3^i}$ .
- d) Calcolare  $\sum_{i=1}^{\textcircled{1}} \frac{1}{5^i}$ .

Il nostro metodo di calcolo numerico non si limita a successioni complete. Sappiamo ad esempio calcolare:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{1}-3} \frac{1}{4^i}$$

in almeno due modi differenti. Possiamo calcolare prima la somma della serie completa e poi sottrarre gli ultimi tre termini o, più elegantemente, possiamo applicare una formula generale alla somma dei primi  $\textcircled{1} - 3$  termini di una serie geometrica. Nel primo caso, si verifica agevolmente che vale:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{1}} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^{\textcircled{1}}} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{4^{\textcircled{1}} - 1}{4^{\textcircled{1}}} \right).$$

Sottraendo all'ultima quantità i termini  $1/4^i$  per  $i = \textcircled{1} - 1, \textcircled{1} - 1, \textcircled{1}$ , si perviene all'espressione:

$$\sum_{i=1}^{\textcircled{1}-3} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} \left( \frac{4^{\textcircled{1}} - 1}{4^{\textcircled{1}}} \right) - \left( \frac{1}{4^{\textcircled{1}-2}} + \frac{1}{4^{\textcircled{1}-1}} + \frac{1}{4^{\textcircled{1}}} \right),$$

che, semplificata, conduce al valore numerico:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{4^i} &= \frac{1}{3} \left( \frac{4^n - 1}{4^n} \right) - \left( \frac{1}{4^{n-2}} + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n} \right) \\
 &= \frac{1}{4^{n-2}} \left[ \frac{4^n - 1}{48} - \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4^{n-2}} \left[ \frac{4^n - 1}{48} - \frac{63}{48} \right] \\
 &= \frac{1}{4^{n-2}} \left[ \frac{4^n - 64}{48} \right] \\
 &= \frac{1}{4^{n-2}} \left[ \frac{4^{n-2} - 4}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{4^{n-3}} \left[ \frac{4^{n-3} - 1}{3} \right]
 \end{aligned}$$

D'altra parte, per  $a = 1/4$ , possiamo ragionare su  $S$  come all'inizio di questa sezione, ma per una successione di lunghezza  $n - 3$ , ottenendo:

$$\sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} \left( \frac{1}{4^{n-3}} - 1 \right) = \frac{1}{3} \left[ \frac{4^{n-3} - 1}{4^{n-3}} \right] = \frac{1}{4^{n-3}} \left[ \frac{4^{n-3} - 1}{3} \right].$$

**Esercizio 30.** Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche:

a)  $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{2^i};$

d)  $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{5^i};$

b)  $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{3^i};$

e)  $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{3^i};$

c)  $\sum_{i=1}^{n-4} \frac{1}{5^i};$

f)  $\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2^i};$

Il lettore che abbia familiarità con la teoria delle serie noterà che, in un sistema numerale come quello in base dieci, è necessario restringere l'attenzione a successioni geometriche di ragione  $a$  con  $-1 < a < 1$  per assicurarsi che le serie corrispondenti abbiano una somma numericamente esprimibile. Questa restrizione cade nell'Aritmetica dell'Infinito. Lo

abbiamo visto per valori positivi di  $a$ , finiti, infinitamente grandi oppure infinitamente piccoli. Ci rimane da considerare il caso in cui  $a < 0$  e  $a \neq -1$  (per  $a = -1$  abbiamo una semplice variante della serie di Grandi). Sotto quest'ultima condizione, la progressione geometrica completa assume segni alterni. Convieni porre  $a = -c$ , con  $0 < c$ , in modo che l'espressione

$$a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, a^n$$

possa essere riscritta come segue:

$$-c, c^2, -c^3, \dots, -c^{n-1}, c^n.$$

Vediamo che i termini di esponente pari sono positivi e quelli di esponente dispari negativi. Associando i termini con lo stesso segno, otteniamo:

$$(c^2 + c^4 + \dots + c^{n-2} + c^n) - c(c^0 + c^2 + c^4 + \dots + c^{n-4} + c^{n-2}) = S - cT,$$

dove ciascuna parentesi include  $\frac{n}{2}$  addendi. Ci basta saper calcolare la somma di una serie di potenze pari di  $c$  per ottenere la somma della serie cercata. Come abbiamo già fatto, poniamo:

$$S = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} c^{2i}$$

ed osserviamo che:

$$c^2 S = S - c^2 + c^{n+2} \quad \text{da cui} \quad S = \frac{c^{n+2} - c^2}{c^2 - 1} = c^2 \left( \frac{c^n - 1}{c^2 - 1} \right).$$

Dal momento che vale  $T = 1 + S - c^n$ , deduciamo che la somma della serie che ci interessa dev'essere:

$$S - cT = S - c(1 + S - c^n) = (1 - c)S + c^{n+1} - c = \frac{c^{n+1} - c}{c + 1} = \frac{c}{c + 1} (c^n - 1).$$

Consideriamo, quale applicazione della formula appena introdotta, la progressione geometrica completa di ragione  $-2$ . Dobbiamo porre  $c = 2$  ed otteniamo.

$$\sum_{i=1}^n (-2)^i = \frac{2}{3}(2^n - 1).$$

Questo risultato potrebbe in prima battuta lasciarci perplessi. Poichè abbiamo sommato soltanto termini in  $\mathcal{Z}$ , il risultato dev'essere intero. D'altro canto, la presenza della frazione  $2/3$  sembra metterci in difficoltà: la somma della serie si presenta infatti come il prodotto di  $2/3$  per un numero

intero. Per assicurarci che il valore numerico da noi calcolato sia effettivamente un numero intero, dobbiamo verificare che  $2^n - 1$  sia un multiplo di 3. Si può dimostrare che, in  $\mathcal{N}$ , ogni predecessore immediato di una potenza pari di 2 dev'essere un multiplo di 3. Più precisamente, per ogni  $k \in \mathcal{N}$ , esiste un numero  $m \in \mathcal{N}$  tale che  $2^{2k} - 1 = 3m$ . Si ottiene questo risultato verificando anzitutto che vale per  $k = 1$  e poi dimostrando che, se vale per  $k$ , allora si trasmette anche al numero successivo  $k + 1$  (si tratta, in termini tecnici, di una dimostrazione per induzione). La verifica per  $k = 1$  è molto semplice. Ammettiamo ora che valga  $2^{2k} - 1 = 3m$  o, equivalentemente  $2^{2k} = 3m + 1$ . In questo caso, moltiplicando per  $2^2 = 4$  ambo i membri dell'ultima equazione, otteniamo:

$$2^2 2^{2k} = 12m + 4 \quad \text{che equivale a} \quad 2^{2(k+1)} = 12m + 4.$$

Chiaramente  $2^{2(k+1)} - 1 = 12m + 3$  è un multiplo di 3. Tanto basta a garantire che, per ogni scelta di  $k$  in  $\mathcal{N}$ , il nostro risultato sia valido. In particolare, se  $k = \textcircled{1}/2$  possiamo dedurre che  $2^n - 1$  è un multiplo di 3.

**Esercizio 31.** Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche:

a)  $\sum_{i=1}^{\textcircled{0}} (-3)^i;$

c)  $\sum_{i=1}^{\textcircled{2}} (-\textcircled{1})^i;$

b)  $\sum_{i=1}^{\textcircled{0}} \left(-\frac{1}{3}\right)^i;$

d)  $\sum_{i=1}^{\textcircled{3}} \left(-\frac{1}{4}\right)^i.$

### 3.3 Aritmetica delle Serie Infinite

Dedichiamo quest'ultima sezione ad alcune considerazioni conclusive. Abbiamo ripetutamente osservato come l'Aritmetica dell'Infinito ci permetta di estendere la nostra capacità di calcolo sulle serie infinite, ampliandola ben oltre le restrizioni imposte dall'impiego di un sistema numerale più debole. Tali restrizioni non conducono soltanto all'impossibilità di determinare numericamente i valori di determinate serie, ma anche a risultati prodotti dalla richiesta simultanea di studiare processi infiniti giunti a compimento e di adottare a questo scopo uno strumento numerale che impedisce di valutarne gli stadi che non siano iniziali e finiti. Lavorando con indici numerici in base dieci, una generica serie infinita non si presenta come un oggetto di studio fissato ma come un processo indefinitamente

protraibile di cui si conosce soltanto l'esordio finito. Due serie generiche si presentano quindi come processi parzialmente confrontabili, del tipo:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{e} \quad B = b_1 + b_2 + b_3, \dots$$

Il confronto tra le lunghezze di questi processi non è numericamente specificabile, nè risulta possibile trattarli come valori numerici, dal momento che le loro somme potrebbero non risultare esprimibili in base dieci. In questo contesto, un'aritmetica delle serie infinite presenta molto presto problemi significativi. Mentre  $A + B$  si riesce a definire abbastanza naturalmente come  $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots$ , non è garantito, se non sotto determinate condizioni (si tratta della convergenza assoluta), che valga  $A + B = B + A$ . Il prodotto  $A \cdot B$  risulta più macchinoso da definire, non ha una sola definizione naturale e solleva quindi il problema di stabilire a quali condizioni le definizioni distinte possibili risultino equivalenti. Infine, il rapporto  $A/B$ , con  $B \neq 0$ , non può essere agevolmente definito termine per termine. Tutte queste difficoltà vengono meno quando sia possibile trattare uniformemente  $A, B$  come valori numerici, poichè in tal caso non è necessario aggiungere all'aritmetica numerica un'aritmetica più restrittiva delle serie infinite, ma un solo trattamento numerico si applica ad entrambe. Consideriamo per esempio le serie complete:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{5}{1} \right)^i = \frac{5}{5-1} \left( \frac{5^{\infty} - 1}{1} \right) \quad \text{e} \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} (-5)^i = \frac{5}{6} (5^{\infty} - 1).$$

In relazione ad uno strumento di calcolo in base dieci, gli addendi di  $A$  non possono essere nemmeno espressi. Quelli di  $B$  possono essere espressi ma la somma della serie non è numericamente esprimibile. Non è dunque nemmeno possibile prospettare il problema di calcolare il rapporto:

$$\frac{B}{A} = \frac{1^{\infty-1} 1 (5-1) (5^{\infty} - 1)}{6 (5^{\infty} - 1^{\infty})}.$$

Sorgono inoltre difficoltà legate all'ordine in cui i termini di una serie infinita vengono sommati. Per esempio, introdotta la serie di Grandi come un segmento iniziale finito indefinitamente estensibile:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

si può congetturare che ogni coppia di termini consecutivi sia associabile e che dunque la somma della serie sia 0, ma si può altrettanto plausibilmente presumere che, ordinandone i termini diversamente, ad esempio così:

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \dots$$

la sua somma debba cambiare e non essere più esprimibile da un numerale in base dieci. Questo tipo di ragionamento è possibile perchè si tratta una serie infinita non come un processo che giunge a compimento (se non giungesse assolutamente ad alcun compimento non avrebbe nemmeno senso porsi il problema di calcolarne la somma) ma come un processo indefinito, che presuppone l'adeguatezza di operazioni indefinitamente ripetibili, come appunto l'associazione o la permutazione di un numero finito di addendi, ai fini della determinazione numerica. L'Aritmetica dell'Infinito si può considerare una critica di questa presupposizione, fondata sul Principio Euclideo. In essa una specificazione numerica di processi infiniti è sempre richiesta, se il calcolo numerico dev'essere applicato. Inoltre, la richiesta di una specificazione corrisponde ad un atto di discriminazione quantitativa tra processi distinti, ad esempio serie complete e loro estensioni.

Nel caso della serie di Grandi, il problema di stabilirne la somma è inscindibile dal problema di specificarne numericamente la lunghezza. Se la serie di Grandi, come l'abbiamo definita, è una serie completa, la sua somma è zero. Qualora noi volessimo permutarne gli addendi in un modo particolare, dovremmo pur sempre tenere conto del fatto che il numero degli addendi sia fissato, benchè infinitamente grande. Per questa ragione, qualora decidessimo di applicare una permutazione degli addendi alla serie, dovremmo tenere conto dei suoi effetti nel calcolo numerico. Se, ad esempio, la permutazione da noi applicata riordinasse i primi termini della serie in questo modo:

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \dots,$$

secondo la regola di far succedere a due termini positivi uno negativo, allora dovremmo tenere conto del fatto che la permutazione in questione possa operare soltanto con  $\frac{1}{2}$  addendi positivi. Se due di essi sono impiegati in ogni blocco di tre termini, verranno esauriti tutti dopo  $3\frac{1}{4}$  termini, il che vuol dire che gli ultimi  $\frac{1}{4}$  addendi della serie, ottenuti in seguito alla permutazione dei suoi termini, devono essere tutti negativi. La somma della serie rimane dunque uguale a zero. Questo esempio illustra un fatto di portata molto generale, cioè il fatto che la somma di una serie infinita risulti invariante rispetto ad ogni permutazione dei suoi addendi. Possiamo illustrare questo fatto in relazione ad una successione completa di addendi. Consideriamo quindi la successione generica:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n,$$

di cui immaginiamo di dover sommare i termini e supponiamo che la loro somma sia  $S$ . Permutare i ① termini della serie vuol dire effettuare una permutazione degli elementi  $a_i$  nella successione data e poi sommarli. Una permutazione fissata  $\pi$  si può descrivere nel modo seguente. Consideriamo anzitutto  $a_1$ : o questo elemento viene trasposto da  $\pi$  in un'altra posizione lungo la successione, oppure no. Se non viene trasposto, la nuova successione inizia con  $a_1$  e si può considerare l'elemento successivo. Si procede in questo modo fino a raggiungere, se c'è, un elemento da trasporre (la permutazione identica lascia la successione com'è). Se, invece,  $a_1$  dev'essere trasposto,  $\pi$  determina la sua nuova posizione  $a_i$ , con  $i \neq 1$ . Si possono dunque scambiare  $a_i$  e  $a_1$ . Se ne ricava la successione:

$$a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_1, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n.$$

A questo punto si considera  $a_i$ . Se  $\pi$  scambia  $a_1$  e  $a_i$ , la nuova successione inizia con  $a_i$  e si può passare a considerare  $a_2$ . Altrimenti, si invertono  $a_i$  e la posizione  $a_j$  in cui  $a_i$  dev'essere collocato secondo  $\pi$ . A questo punto  $a_1, a_i$  sono fissati da  $\pi$  e si considera  $a_j$ . Se è fissato anch'esso, si passa all'elemento di indice minimo che dev'essere trasposto. Altrimenti si inverte  $a_j$  con l'elemento nella posizione che esso deve occupare secondo  $\pi$ . È chiaro che, così facendo, si esegue al più una successione infinita di ① inversioni, al termine della quale la permutazione  $\pi$  è conclusa. Dopo la prima inversione, poniamo tra  $a_1$  e  $a_i$ , si passa dalla serie:

$$a_1 + (a_2 + \dots + a_{i-1}) + a_i + (a_{i+1} + \dots + a_n) = a_1 + X + a_i + Y,$$

dove  $X, Y$  sono, rispettivamente, i valori numerici della prima e della seconda somma racchiusa tra parentesi, alla serie:

$$a_i + (a_2 + \dots + a_{i-1}) + a_1 + (a_{i+1} + \dots + a_n) = a_i + X + a_1 + Y.$$

Per la commutatività e associatività della somma aritmetica, abbiamo:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + X + a_i + Y = X + (a_1 + a_i) + Y = X + (a_i + a_1) + Y = \\ &= (X + a_i) + a_1 + Y = a_i + X + a_1 + Y. \end{aligned}$$

In altre parole, la somma della serie iniziale mantiene il medesimo valore  $S$  dopo un'inversione. Poichè una permutazione su una successione completa equivale, come abbiamo appena visto, ad una successione di al più ① inversioni, essa non altera la somma  $S$ . Questo fatto è particolarmente significativo in relazione ad un risultato ottenuto indipendentemente da



Bernhard Riemann (1826–1866) e da Ulisse Dini (1845–1918), secondo il quale determinate serie, dette condizionalmente convergenti, ammettono qualsiasi somma (compresi i valori non numerici  $-\infty$  e  $+\infty$ ) purchè i loro termini siano presi in un ordine opportuno. Questo sorprendente risultato è frutto della restrizione ad un sistema numerale che impedisce di considerare la lunghezza infinita di una serie. Per tale ragione esso non può sussistere nell’Aritmetica dell’Infinito. Nel caso classico della serie armonica alternata:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots,$$

per la quale di solito si esemplifica il teorema di Dini e Riemann, Anatoly Zhigljavsky ha mostrato esplicitamente in [37] che, una volta che si tratti questa serie come una serie completa, le permutazioni dei suoi addendi non ne alterano la somma. Il lettore interessato ad approfondire questo tema può consultare sia [37] che, da un punto di vista logico, [18] (altri risultati notevoli sulle serie infinite, in relazioni a problemi classici di analisi, riguardanti la funzione Zeta di Riemann e la funzione Eta di Dirichlet, sono affrontati mediante l’aritmetica dell’infinito in [30]).

Vogliamo chiudere questo capitolo proponendo un’ultima riflessione sul rapporto tra l’aritmetica dell’infinito ed lo studio matematico delle serie. Vi sono casi, come appunto la serie di Grandi o la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$ , in cui sono state proposte strategie di calcolo che permettessero di ottenere una ‘somma’ numerica. Queste strategie sono sostanzialmente metodi con cui ovviare alle difficoltà sollevate dal sistema numerale su cui fanno affidamento. Esse mantengono fisso un sistema numerale, ma cercano di introdurre nuovi metodi di calcolo. Noi abbiamo seguito la strategia opposta, poichè abbiamo introdotto un nuovo sistema numerale in modo da mantenere i metodi usuali di calcolo. In tal modo non incorriamo in complicazioni di calcolo e riusciamo ad offrire non solo risultati nuovi ma anche un’analisi delle difficoltà in cui i metodi di calcolo vincolati a sistemi numerali meno espressivi del nostro devono incorrere. A scopo illustrativo, consideriamo proprio la serie:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

e il modo originariamente proposto da Śrinivasa Ramanujan (1887–1920) per calcolarne la somma. Ponendo la somma di questa serie uguale a  $S$ , Ramanujan nota che, essendo  $S = 4S - 3S$ , è possibile ottenere  $-3S$  come la differenza  $S - 4S$ , che egli calcola come segue:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots \\ -4S &= \quad - 4 \quad \quad - 8 \quad \quad - 12 \dots \\ -3S &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots \end{aligned}$$

Ramanujan sfrutta il fatto che, sviluppando formalmente la funzione  $1/(1+x^2)$  in serie di potenze, essa assume il valore  $1/4$  per  $x = 1$ , quando la serie di potenze corrispondente è appunto la serie alternata  $-3S$ . Egli può dunque calcolare:

$$-3S = \frac{1}{4}, \text{ che implica } S = -\frac{1}{12}.$$

Sorprende il fatto che una serie di termini positivi come  $S$  si trovi assegnato un valore negativo. Noi abbiamo già calcolato la somma della serie completa di cui si possono studiare in base dieci soltanto generici segmenti iniziali finiti, come nel caso appena descritto. Il valore da noi trovato era  $\textcircled{1}(\textcircled{1} + 1)/2$ . Vogliamo ora verificare che a questo valore si arriva anche seguendo la procedura di Ramanujan, purchè si stabilisca preventivamente quale sia la lunghezza infinita delle serie prese in considerazione. Se ci atteniamo a serie complete, notiamo che la differenza  $S - 4S$ , calcolata secondo il metodo di Ramanujan, comporta una sfasatura di ben  $\textcircled{1}/2$  addendi nella procedura di somma termine per termine. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 \dots + \textcircled{1} \\ -4S &= \quad - 4 \quad \quad \dots - 4\frac{\textcircled{1}}{2} - 4\left(\frac{\textcircled{1}}{2} + 1\right) - \dots - 4\textcircled{1} \\ -3S &= 1 - 2 + 3 - \dots - \textcircled{1} - 4\left(\frac{\textcircled{1}}{2} + 1\right) - \dots - 4\textcircled{1}. \end{aligned}$$

Il fatto che un numero infinito di termini in  $-4S$  occorra oltre la serie completa  $S$  non può essere preso in considerazione in assenza di specificazioni numeriche adeguate. Quando se ne tiene conto, si può passare a considerare la serie estesa:

$$-3S = (1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (\textcircled{1} - 1) - \textcircled{1}) - 4\left(\left(\frac{\textcircled{1}}{2} + 1\right) + \dots + \textcircled{1}\right) = X - 4Y$$

Noi sappiamo già che  $X = -\textcircled{1}/2$  e possiamo inoltre sfruttare il fatto che gli addendi di  $Y$  siano la prima metà dei termini in  $A_{\textcircled{1},1}$ . Quindi:

$$Y = \frac{\textcircled{1}^2}{4} + \frac{\textcircled{1}}{4} \left(\frac{\textcircled{1} + 2}{2}\right).$$

Possiamo quindi valutare:

$$-3S = -\frac{\textcircled{1}}{2} - \textcircled{1}^2 - \frac{\textcircled{1}(\textcircled{1} + 2)}{2} = \frac{-\textcircled{1} - 2\textcircled{1}^2 - \textcircled{1}^2 - 2\textcircled{1}}{2} = -3\frac{\textcircled{1}^2 + \textcircled{1}}{2}.$$

Non c'è bisogno di fare affidamento su serie di potenze: basta il calcolo aritmetico per trovare il valore numerico di  $-3S$ , da cui si ottiene il risultato atteso:

$$S = \frac{\textcircled{1}(\textcircled{1} + 1)}{2}.$$

Le ultime considerazioni sono state originariamente svolte da Yaroslav Sergeyev in [34].



## 4. Come usare il resto di questo opuscolo

Abbiamo osservato nell'introduzione che l'Aritmetica dell'Infinito è stata applicata in ambiti molto vari, allo scopo sia di ottenere risultati nuovi che di risolvere problemi per i quali il calcolo aritmetico usuale e l'applicazione dell'operazione di passaggio al limite si rivelano inadeguati. Fra questi problemi, molti hanno carattere elementare: il fatto che non conducano a soluzioni elementari, cioè ottenibili attraverso il solo calcolo aritmetico, conferma l'insufficienza dell'aritmetica tradizionale ai fini della loro risoluzione. Nel seguito di questo opuscolo, offriamo sei schede didattiche, ciascuna dedicata all'esplorazione di un problema elementare che non può essere affrontato in modo soddisfacente se non facendo ricorso all'Aritmetica dell'Infinito. Lo stato insoddisfacente in cui ciascun problema si presenta, in assenza di un trattamento aritmetico adeguato, genera un particolare **paradosso dell'infinito**. La risoluzione di un paradosso non è altro che l'introduzione di un metodo in grado di sciogliere le difficoltà inerenti all'indagine su un problema condotta con metodi ad esso inadeguati. Ciò significa che i paradossi matematici vanno anzitutto intesi come *richieste di metodi* e non come fenomeni dati ma impenetrabili.

Tale concezione generale sta alla base di tutte le schede proposte, che invitano lo studente e l'insegnante a sviluppare un'indagine critica su specifici paradossi. **È possibile utilizzare le schede didattiche senza avere letto ciò che precede.** Infatti, ogni scheda introduce in modo conciso e

autonomo, mediante esercizi, tutte le nozioni e tecniche aritmetiche necessarie a risolvere il problema di cui essa tratta. Le medesime nozioni si trovano ripetute all'inizio di ciascuna scheda affinché l'insegnante che desideri farne uso non abbia bisogno di rendere disponibile ai propri studenti alcun genere di materiale ausiliario.

Pur essendo, quanto alle pagine iniziali, simili se non identiche, le schede differiscono per il problema su cui ciascuna si concentra. Una sequenza graduale di esercizi promuove la riflessione critica sul problema, sul suo carattere paradossale e sul modo di risolverlo mediante l'Aritmetica dell'Infinito. Gli esercizi sono distinti in due categorie: quelli segnati da un asterisco richiedono di fare appello all'Aritmetica dell'Infinito; gli esercizi restanti devono essere affrontati facendo soltanto uso dei numerali in base dieci

Le schede didattiche possono essere affrontate in qualsiasi ordine oppure utilizzate singolarmente nel contesto, ad esempio, di un laboratorio di classe. Quante e quali possano essere prese in considerazione dipende dalle esigenze e dagli interessi di studenti ed insegnanti.

## 5. Scheda A: l'hotel di Hilbert

### 5.1 Contare $\mathbb{N}$

Supponiamo di avere di fronte a noi cinque oggetti e di volerli contare. Quando li contiamo, noi assegniamo loro i simboli numerici 1, 2, 3, 4, 5. Questi simboli numerici non sono i soli a nostra disposizione, ma fanno parte della successione di simboli 1, 2, 3, 4, 5, ..., che non ha un ultimo elemento. Possiamo quindi descrivere il nostro conteggio in questo modo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Un conteggio non è altro che l'utilizzo di una parte iniziale di un sistema di notazione numerica. Estendiamo ora questa idea a collezioni infinite di oggetti. Vogliamo in particolare descrivere un conteggio della collezione  $\mathbb{N}$ , comprendente i numeri interi positivi 1, 2, 3, ..., che possa essere portato a termine proprio come verrebbe portato a termine un conteggio di cinque elementi. **Introduciamo allora una nuova notazione numerica, che ci permetta di descrivere un conteggio completo degli oggetti in  $\mathbb{N}$  come la parte iniziale di una nuova successione di simboli.** Questo conteggio completo si conclude con il numero ① (*gross-one*, letto all'inglese), che:

1. segue tutti i numeri esprimibili nella notazione usuale. Ciò significa che  $\textcircled{1} > 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ;
2. si comporta, dal punto di vista del calcolo aritmetico, come i numeri esprimibili nella notazione usuale.

Un conteggio completo dei numeri interi positivi assume ora la forma:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & \textcircled{1}+1 & \textcircled{1}+2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & & & \end{array}$$

La nuova notazione numerica ci permette di descrivere un ambiente esteso di cui la successione infinita  $1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}$  è una parte iniziale.

**Esercizio 32.**

- Facendo appello alla proprietà (1), verificare che  $\textcircled{1}-1 > 1, 2, 3, 4, \dots$  e che ciò vale anche per  $\textcircled{1}-2$ . Generalizzare questi risultati.
- Facendo appello alla proprietà (2), spiegare perché devono valere le seguenti disuguaglianze:  $\textcircled{1}-1 < \textcircled{1}$  e  $\textcircled{1} < \textcircled{1}+1$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare (i)  $\textcircled{1}-\textcircled{1}$  e (ii)  $4\textcircled{1}-\textcircled{1}-3\textcircled{1}+3$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare  $(\textcircled{1}+1)^2$ .

**5.2 Contare suddivisioni di  $\mathbb{N}$**

Descriviamo  $\mathbb{N}$  come una successione mediante i nostri usuali simboli numerici. Tale successione ci si presenta nel modo seguente:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ \dots$$

Riscriviamo ora la nostra successione su due colonne, procedendo dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

Otteniamo in questo modo una suddivisione di  $\mathbb{N}$  in due parti uguali, i numeri dispari e i numeri pari (la prima e la seconda riga qui sopra). Per ottenere una suddivisione più fine, in tre parti uguali, scriviamo la successione iniziale su tre colonne, procedendo ancora dall'alto in basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & \dots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \dots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & \dots \end{array}$$



Poichè ci sono  $\mathbb{1}$  numeri in  $\mathbb{N}$ , la suddivisione in due parti uguali lo spezza in  $\mathbb{1}/2$  numeri pari e  $\mathbb{1}/2$  numeri dispari. La suddivisione in tre parti uguali lo spezza in tre successioni, ciascuna delle quali contiene  $\mathbb{1}/3$  numeri.

**Esercizio 33.**

a) Utilizzando  $\mathbb{1}$ , noi possiamo descrivere  $\mathbb{N}$  in questo modo:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \dots \ \mathbb{1} - 2 \ \mathbb{1} - 1 \ \mathbb{1}.$$

Dal momento che  $\mathbb{1}/2 + \mathbb{1}/2 = 1$ ,  $\mathbb{1}$  è pari. Per la proprietà (2),  $\mathbb{1} - 1$  dev'essere dispari e  $\mathbb{1} - 2$  pari. Quindi, la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  è:

$$2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ \dots \ \mathbb{1} - 4 \ \mathbb{1} - 2 \ \mathbb{1},$$

ma essa non può essere lunga quanto l'intera successione  $\mathbb{N}$ , che contiene il doppio dei suoi termini. Confrontare la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

- b) Confrontare la successione dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ . Confrontare infine la successione dei multipli di 3 in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .
- c) Usando la notazione con  $\mathbb{1}$ , descrivere la suddivisione di  $\mathbb{N}$  in quattro parti uguali. Di quanti numeri consta ciascuna parte della suddivisione?

### 5.3 L'hotel di Hilbert con un nuovo ospite

**Avvertenza:** alcuni tra gli esercizi nella parte restante di questa scheda sono segnati da un asterisco. Questi esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico con  $\mathbb{1}$ . Gli altri esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico senza  $\mathbb{1}$ .

L'hotel di Hilbert ha infinite stanze. Più precisamente, ha tante stanze quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ . Emmy vorrebbe alloggiarvi ma le viene spiegato che tutte le camere sono occupate. Dopo un momento di riflessione, Emmy propone un metodo che le permetta di trovare una stanza, benchè l'albergo sia al completo. Basta che l'ospite nella camera 1 si sposti nella camera 2,

che l'ospite nella camera 2 si sposti nella camera 3, e così via. In questo modo, la camera 1 sarà libera ed Emmy potrà alloggiarvi.

### Esercizio 34.

- a) Se il ragionamento di Emmy è corretto, lo stesso numero di ospiti nell'hotel di Hilbert può sia occupare tutte le camere che lasciarne libera una, senza che ospiti diversi siano costretti a condividere la stessa camera. Non solo, lo stesso numero di ospiti può sia occupare tutte le camere che lasciarne libere due, senza che alcuna camera debba essere condivisa. Generalizzare queste osservazioni e discuterne la correttezza.
- b) \*È corretto parlare del 'numero' di ospiti nell'hotel? Lo si può esprimere? A che condizioni?
- c) La regola proposta da Emmy consiste nell'assegnare ogni ospite ad una nuova camera. L'assegnazione si può descrivere in questo modo:

1	2	3	4	5	...
2	3	4	5	6	...

dove, in ogni colonna, il numero superiore indica la camera attuale di un ospite e quello inferiore la camera in cui gli si chiede di spostarsi. Questa assegnazione sembra funzionare: perchè? Si può dire che prima o poi verrà portata a termine?

- d) \*Utilizzare l'Aritmetica dell'Infinito per valutare la correttezza del ragionamento di Emmy. In particolare, specificare il numero di ospiti nell'hotel di Hilbert prima che arrivi Emmy e il numero di ospiti dopo il suo arrivo.

## 5.4 L'hotel di Hilbert con infiniti nuovi ospiti

L'hotel di Hilbert ha infinite stanze. Più precisamente, ha tante stanze quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ . Emmy ha tanti amici quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$  e vorrebbe alloggiare con loro all'hotel di Hilbert, che tuttavia è al completo. Dopo un momento di riflessione, Emmy propone un metodo che per trovare una stanza a sè e a tutti i suoi amici. Basta che l'ospite nella camera 1 si sposti nella camera 2, che l'ospite nella camera 2 si sposti

nella camera 4, che l'ospite nella camera 3 si sposti nella camera 6, e così via. In questo modo, gli amici di Emmy potranno alloggiare nelle camere 3, 5, 7, ... ed Emmy potrà occupare la camera 1.

**Esercizio 35.**

- a) Se Felix arrivasse all'hotel di Hilbert nello stesso momento di Emmy, accompagnato da infiniti amici (tanti quanti i numeri in  $\mathbb{N}$ ), come potrebbero pensare di accordarsi Felix ed Emmy per riuscire ad alloggiare, insieme a tutti i loro amici, nell'hotel di Hilbert, nonostante al loro arrivo tutte le camere siano occupate?
- b) \*Quante camere servono per poter offrire alloggio a Emmy e ai suoi amici? Quante camere rende disponibili la proposta di Emmy? Utilizzare ① per determinare risposte numeriche a queste domande e calcolare il numero di ospiti senza una camera dopo l'attuazione della proposta di Emmy.
- c) \*Ripetere l'ultimo esercizio in riferimento alla procedura ideata in (a) per risolvere il problema di Emmy e Felix.



## 6. Scheda B: la lampada di Thomson

### 6.1 Contare $\mathbb{N}$

Supponiamo di avere di fronte a noi cinque oggetti e di volerli contare. Quando li contiamo, noi assegniamo loro i simboli numerici 1, 2, 3, 4, 5. Questi simboli numerici non sono i soli a nostra disposizione, ma fanno parte della successione di simboli 1, 2, 3, 4, 5, ..., che non ha un ultimo elemento. Possiamo quindi descrivere il nostro conteggio in questo modo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Un conteggio non è altro che l'utilizzo di una parte iniziale di un sistema di notazione numerica. Estendiamo ora questa idea a collezioni infinite di oggetti. Vogliamo in particolare descrivere un conteggio della collezione  $\mathbb{N}$ , comprendente i numeri interi positivi 1, 2, 3, ..., che possa essere portato a termine proprio come verrebbe portato a termine un conteggio di cinque elementi. **Introduciamo allora una nuova notazione numerica, che ci permetta di descrivere un conteggio completo degli oggetti in  $\mathbb{N}$  come la parte iniziale di una nuova successione di simboli.** Questo conteggio completo si conclude con il numero ① (*gross-one*, letto all'inglese), che:

1. segue tutti i numeri esprimibili nella notazione usuale. Ciò significa che  $\textcircled{1} > 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ;
2. si comporta, dal punto di vista del calcolo aritmetico, come i numeri esprimibili nella notazione usuale.

Un conteggio completo dei numeri interi positivi assume ora la forma:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & \textcircled{1}+1 & \textcircled{1}+2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & & & \end{array}$$

La nuova notazione numerica ci permette di descrivere un ambiente esteso di cui la successione infinita  $1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}$  è una parte iniziale.

### Esercizio 36.

- Facendo appello alla proprietà (1), verificare che  $\textcircled{1}-1 > 1, 2, 3, 4, \dots$  e che ciò vale anche per  $\textcircled{1}-2$ . Generalizzare questi risultati.
- Facendo appello alla proprietà (2), spiegare perché devono valere le seguenti disuguaglianze:  $\textcircled{1}-1 < \textcircled{1}$  e  $\textcircled{1} < \textcircled{1}+1$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare (i)  $\textcircled{1}-\textcircled{1}$  e (ii)  $4\textcircled{1}-\textcircled{1}-3\textcircled{1}+3$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare  $(\textcircled{1}+1)^2$ .

### Esercizio 37.

- La proprietà (2) riguarda anche l'aritmetica con i numeri interi negativi e con le frazioni. Ad esempio:

$$\frac{\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{3} = -\frac{\textcircled{1}}{12}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{1}} = \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}.$$

Calcolare:

$$(i) \frac{3\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{2}; (ii) \frac{1}{2^{\textcircled{1}}} + \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}$$

## 6.2 Sommare le potenze di $1/2$

Consideriamo la somma delle prime quattro potenze successive di  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Possiamo calcolarne il valore numerico, ponendolo uguale a  $x$  e verificare che:

$$2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 + x - \frac{1}{16}.$$

Il valore della somma è quindi  $x = 1 - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$ .

**Esercizio 38.**

a) Ripetere il ragionamento appena effettuato e determinare la somma delle prime  $n$  potenze di  $1/2$ .

b) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

c) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

### 6.3 Numeri pari e dispari

Descriviamo  $\mathbb{N}$  come una successione mediante i nostri usuali simboli numerici. Tale successione ci si presenta nel modo seguente:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

Riscriviamo ora la nostra successione su due colonne, procedendo dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, così:

1 3 5 7 9 ...  
2 4 6 8 10 ...

Otteniamo in questo modo una suddivisione di  $\mathbb{N}$  in due parti uguali, i numeri dispari e i numeri pari (la prima e la seconda riga qui sopra). Poichè ci sono  $\textcircled{1}$  numeri in  $\mathbb{N}$ , la suddivisione in due parti uguali lo spezza in  $\textcircled{1}/2$  numeri pari e  $\textcircled{1}/2$  numeri dispari. Abbiamo dunque:

$$\textcircled{1} = \frac{\textcircled{1}}{2} + \frac{\textcircled{1}}{2},$$

con  $\textcircled{1}/2$  un numero intero in  $\mathbb{N}$ . Si può verificare che  $\textcircled{1}/2$  è maggiore di  $1, 2, 3, 4, \dots$ , proprio come  $\textcircled{1}$ , ma, per l'ultima uguaglianza, abbiamo anche

$\textcircled{1}/2 < \textcircled{1}$ . In breve  $\textcircled{1}/2$  è un numero infinitamente grande in  $\mathbb{N}$ , ma non il massimo di  $\mathbb{N}$ .

### Esercizio 39.

a) Utilizzando  $\textcircled{1}$ , noi possiamo descrivere  $\mathbb{N}$  in questo modo:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad \textcircled{1} - 2 \quad \textcircled{1} - 1 \quad \textcircled{1}.$$

Dal momento che  $\textcircled{1}/2 + \textcircled{1}/2 = 1$ ,  $\textcircled{1}$  è pari. Per la proprietà (2),  $\textcircled{1} - 1$  dev'essere dispari e  $\textcircled{1} - 2$  pari. Quindi, la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  è:

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad \dots \quad \textcircled{1} - 4 \quad \textcircled{1} - 2 \quad \textcircled{1},$$

ma essa non può essere lunga quanto l'intera successione  $\mathbb{N}$ , che contiene il doppio dei suoi termini. Confrontare la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

b) Confrontare la successione dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ . Confrontare infine la successione dei multipli di 3 in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

c) Usando la notazione con  $\textcircled{1}$ , descrivere la suddivisione di  $\mathbb{N}$  in quattro parti uguali. Di quanti numeri consta ciascuna parte della suddivisione?

## 6.4 La lampada di Thomson

**Avvertenza:** alcuni tra gli esercizi nella parte restante di questa scheda sono segnati da un asterisco. Questi esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico con  $\textcircled{1}$ . Gli altri esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico senza  $\textcircled{1}$ .

Una lampada<sup>1</sup>, inizialmente spenta, viene accesa dopo  $1/2$  minuti. Dopo altri  $1/4$  di minuti, viene spenta. Dopo altri  $1/8$  minuti, viene di nuovo accesa. Queste operazioni sono ripetute tante volte quanti sono i numeri in

<sup>1</sup>Il problema discusso in questa sezione è stato originariamente proposto in [35]



N.

**Esercizio 40.**

- a) Dopo quanto tempo la lampada è stata accesa e spenta in tutto mille volte?
- b) Dopo quanto tempo la lampada è stata accesa e spenta in tutto un milione di volte?
- c) Verificare che, dato un numero specificabile di operazioni, queste operazioni richiedono, per essere portate a termine, meno di un minuto.

**Esercizio 41.** Individuare e valutare i presupposti su cui poggia la seguente argomentazione:

Se la lampada viene accesa prima che sia trascorso un minuto, essa viene anche spenta poco dopo, sempre prima che sia trascorso un minuto. Nello stesso modo, se consideriamo un istante in cui la lampada è spenta e non è ancora trascorso un minuto, essa verrà senz'altro accesa prima che sia trascorso un minuto. Quindi, lo stato della lampada al termine di un minuto è oggettivamente indeterminato.

**Esercizio 42.**

- a) \*Qual è il numero di operazioni effettuate sull'interruttore della lampada di Thomson?
- b) \*Quanto tempo ci vuole per effettuarle tutte? Quanto tempo ci vuole per effettuarne metà?
- c) \*Determinare lo stato della lampada quando la penultima operazione viene effettuata.
- d) \*Supponiamo che il numero di operazioni venga sufficientemente ampliato. La lampada di Thomson sarà accesa o spenta dopo  $\textcircled{1} + 100$  operazioni?
- e) \*Dopo  $3\textcircled{1} + 1$  operazioni?
- f) \*È possibile modificare le infinite operazioni da svolgersi in modo che la lampada di Thomson si trovi spenta esattamente dopo un minuto?



## 7. Scheda C: il cubo di Arsenjevic

### 7.1 Contare $\mathbb{N}$

Supponiamo di avere di fronte a noi cinque oggetti e di volerli contare. Quando li contiamo, noi assegniamo loro i simboli numerici 1, 2, 3, 4, 5. Questi simboli numerici non sono i soli a nostra disposizione, ma fanno parte della successione di simboli 1, 2, 3, 4, 5, ..., che non ha un ultimo elemento. Possiamo quindi descrivere il nostro conteggio in questo modo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5. & & & \end{array}$$

Un conteggio non è altro che l'utilizzo di una parte iniziale di un sistema di notazione numerica. Estendiamo ora questa idea a collezioni infinite di oggetti. Vogliamo in particolare descrivere un conteggio della collezione  $\mathbb{N}$ , comprendente i numeri interi positivi 1, 2, 3, ..., che possa essere portato a termine proprio come verrebbe portato a termine un conteggio di cinque elementi. **Introduciamo allora una nuova notazione numerica, che ci permetta di descrivere un conteggio completo degli oggetti in  $\mathbb{N}$  come la parte iniziale di una nuova successione di simboli.** Questo conteggio completo si conclude con il numero ① (*gross-one*, letto all'inglese), che:

1. segue tutti i numeri esprimibili nella notazione usuale. Ciò significa che  $\textcircled{1} > 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ;
2. si comporta, dal punto di vista del calcolo aritmetico, come i numeri esprimibili nella notazione usuale.

Un conteggio completo dei numeri interi positivi assume ora la forma:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & \textcircled{1}+1 & \textcircled{1}+2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & & & \end{array}$$

La nuova notazione numerica ci permette di descrivere un ambiente esteso di cui la successione infinita  $1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}$  è una parte iniziale.

### Esercizio 43.

- Facendo appello alla proprietà (1), verificare che  $\textcircled{1}-1 > 1, 2, 3, 4, \dots$  e che ciò vale anche per  $\textcircled{1}-2$ . Generalizzare questi risultati.
- Facendo appello alla proprietà (2), spiegare perché devono valere le seguenti disuguaglianze:  $\textcircled{1}-1 < \textcircled{1}$  e  $\textcircled{1} < \textcircled{1}+1$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare (i)  $\textcircled{1}-\textcircled{1}$  e (ii)  $4\textcircled{1}-\textcircled{1}-3\textcircled{1}+3$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare  $(\textcircled{1}+1)^2$ .

### Esercizio 44.

- La proprietà (2) riguarda anche l'aritmetica con i numeri interi negativi e con le frazioni. Ad esempio:

$$\frac{\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{3} = -\frac{\textcircled{1}}{12}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{1}} = \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}.$$

Calcolare:

$$(i) \frac{3\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{2}; (ii) \frac{1}{2^{\textcircled{1}}} + \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}$$

## 7.2 Sommare le potenze di $1/2$

Consideriamo la somma delle prime quattro potenze successive di  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Possiamo calcolarne il valore numerico, ponendolo uguale a  $x$  e verificare che:

$$2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 + x - \frac{1}{16}.$$

Il valore della somma è quindi  $x = 1 - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$ .

**Esercizio 45.**

a) Ripetere il ragionamento appena effettuato e determinare la somma delle prime  $n$  potenze di  $1/2$ .

b) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

c) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

### 7.3 Contare suddivisioni di $\mathbb{N}$

Descriviamo  $\mathbb{N}$  come una successione mediante i nostri usuali simboli numerici. Tale successione ci si presenta nel modo seguente:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ \dots$$

Riscriviamo ora la nostra successione su due colonne, procedendo dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

Otteniamo in questo modo una suddivisione di  $\mathbb{N}$  in due parti uguali, i numeri dispari e i numeri pari (la prima e la seconda riga qui sopra). Per ottenere una suddivisione più fine, in tre parti uguali, scriviamo la successione iniziale su tre colonne, procedendo ancora dall'alto in basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & \dots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \dots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & \dots \end{array}$$

Poichè ci sono  $\textcircled{1}$  numeri in  $\mathbb{N}$ , la suddivisione in due parti uguali lo spezza in  $\textcircled{1}/2$  numeri pari e  $\textcircled{1}/2$  numeri dispari. La suddivisione in tre par-

ti uguali lo spezza in tre successioni, ciascuna delle quali contiene  $\frac{1}{3}$  numeri.

### Esercizio 46.

a) Utilizzando  $\frac{1}{3}$ , noi possiamo descrivere  $\mathbb{N}$  in questo modo:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad \frac{1}{3} - 2 \quad \frac{1}{3} - 1 \quad \frac{1}{3}.$$

Dal momento che  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ,  $\frac{1}{3}$  è pari. Per la proprietà (2),  $\frac{1}{3} - 1$  dev'essere dispari e  $\frac{1}{3} - 2$  pari. Quindi, la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  è:

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad \dots \quad \frac{1}{3} - 4 \quad \frac{1}{3} - 2 \quad \frac{1}{3},$$

ma essa non può essere lunga quanto l'intera successione  $\mathbb{N}$ , che contiene il doppio dei suoi termini. Confrontare la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

- b) Confrontare la successione dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ . Confrontare infine la successione dei multipli di 3 in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .
- c) Usando la notazione con  $\frac{1}{3}$ , descrivere la suddivisione di  $\mathbb{N}$  in quattro parti uguali. Di quanti numeri consta ciascuna parte della suddivisione?

### Esercizio 47.

- a) Dal momento che  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ,  $\frac{1}{2}$  è il doppio di un numero in  $\mathbb{N}$  ed è quindi un numero pari. Stabilire se  $\frac{1}{2} + 1$  sia pari o dispari.
- b) Stabilire quali tra i numeri  $\frac{1}{2} - 3, \frac{1}{2} - 2, \frac{1}{2} - 1$  siano pari e quali siano dispari.
- c) Stabilire se  $\frac{1}{4}$  sia pari o dispari e se lo sia  $\frac{1}{3}$ .

## 7.4 Il cubo di Arsenjevic

**Avvertenza:** alcuni tra gli esercizi nella parte restante di questa scheda sono segnati da un asterisco. Questi esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico con  $\frac{1}{3}$ . Gli altri esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico senza  $\frac{1}{3}$ .

Un muratore<sup>1</sup> posa l'una sull'altra, alternandole, lastre quadrate di colore verde e lastre di colore rosso. La prima lastra è di colore rosso, è spessa  $1/2$  metri ed è posata  $1/2$  minuti dopo un certo tempo iniziale fissato. Dopo altri  $1/4$  minuti, la seconda lastra, di colore verde e spessa  $1/4$  metri, viene posata sulla prima. Dopo altri  $1/8$  minuti, la terza lastra, di colore rosso e spessa  $1/8$  metri, è posata sopra la seconda, e così via. Ci sono tante lastre quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ .

**Esercizio 48.**

- a) Quanto tempo impiega il muratore a posare le prime mille lastre?
- b) \*Quanto tempo impiega il muratore a posare metà delle lastre a sua disposizione?
- c) \*Quando metà dell'opera è compiuta, di che colore è l'ultima lastra posata?.
- d) \*Quando un terzo dell'opera è compiuta, quanto è alta la pila di lastre posate dal muratore?
- e) \*Quando l'intera opera è compiuta, di che colore è la cima della pila di lastre? Il blocco di lastre costruito dal muratore è un cubo di lato un metro?
- f) Individuare i presupposti del seguente argomento e valutarne la correttezza:

Se il muratore ha già posato una lastra verde prima che sia trascorso un minuto, allora poserà su di essa una lastra rossa prima che sia trascorso un minuto. Ma, se questo accade, allora il muratore ha ancora tempo per posare una lastra verde prima che sia trascorso un minuto. Dopo un minuto, la cima della pila di lastre non è nè verde, nè rossa.

<sup>1</sup>Il problema discusso in questa sezione è stato originariamente proposto in [3].

**Esercizio 49.**

- a) \*Di che colore è la cima della pila dopo che sono state posate  $\frac{\textcircled{1}}{3} - 1$  lastre?
- b) \*Di che colore è la cima della pila dopo che sono state posate  $\frac{\textcircled{1}}{6} + \frac{\textcircled{1}}{2}$  lastre? Quanto tempo è servito al muratore per posarle?

Consideriamo ora due muratori che iniziano ad impilare lastre nello stesso momento. Uno di essi opera come già descritto mentre l'altro è più lento e posa la prima lastra quando il primo muratore posa la seconda, la terza quando il primo muratore posa la quarta, e così via. Inoltre, il secondo muratore si ferma quando il primo ha completato la posa delle sue lastre. Ciascun muratore ha a sua disposizione tante lastre quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ .

**Esercizio 50.** Identificare i presupposti del seguente argomento e valutarne la correttezza:

Anche se un muratore è più lento dell'altro, dopo un minuto hanno entrambi posato tutte le lastre a loro disposizione. Scegliamo infatti una lastra qualsiasi, ad esempio la seconda. Il primo muratore la posa dopo  $1/2 + 1/4$  minuti. Mancano quindi  $1/4$  minuti allo scadere di un minuto, ma il secondo muratore riesce a posare la seconda lastra  $1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$  minuti, pur sempre prima che un minuto sia trascorso. Fintanto che un minuto non è trascorso, il secondo muratore ha sempre il tempo di posare una nuova lastra. Ma, per ogni lastra, se il primo muratore l'ha posata, non è ancora trascorso un minuto e c'è tempo per il secondo di posare la lastra corrispondente. Quindi, quando un minuto è trascorso, entrambi i muratori hanno posato lo stesso numero di lastre.



**Esercizio 51.**

- a) \*Nel caso appena descritto, se ci sono tante lastre per ogni muratore quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ , di che colore sono le sommità delle pile di lastre prodotte da ciascuno di essi?
- b) \*Consideriamo ora il caso in cui il secondo muratore posi una lastra per ogni due lastre posate dal primo muratore. In che cosa differiscono le rispettive costruzioni dopo un minuto dal loro inizio?

Consideriamo, per finire, una situazione in cui tre muratori siano all'opera e abbiano rispettivamente a disposizione  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{1}/2$  e  $\textcircled{1}/3$  lastre. Il muratore con meno lastre posa la prima dopo  $1/2$  minuto da un tempo iniziale fissato, la seconda dopo altri  $1/4$  minuti, e così via. Il muratore con  $\textcircled{1}/2$  lastre posa le prime  $\textcircled{1}/6$  al ritmo del precedente muratore, ma poi rallenta e continua fino all'esaurimento delle proprie lastre due volte più lento che all'inizio dell'opera. Invece, il muratore con  $\textcircled{1}$  lastre è, fin dall'inizio, quattro volte più lento del muratore con  $\textcircled{1}/2$  lastre al suo ritmo più lento.

**Esercizio 52.**

- a) \*Dopo quanto tempo il muratore più veloce esaurisce le sue lastre? Dopo quanto tempo le esaurisce il muratore più lento?
- b) Descrivere il risultato ottenuto da ciascun muratore dopo un minuto.
- c) \*Descrivere il risultato ottenuto da ciascun muratore dopo un minuto.
- d) \*Il muratore più veloce decide di dare il cambio al più lento dopo che quest'ultimo ha compiuto metà del suo lavoro, e tenendo il ritmo seguito per la propria costruzione. Quanto tempo impiegheranno i due muratori a posare tutte le lastre date?



## 8. Scheda D: il paradosso di Ross

### 8.1 Contare $\mathbb{N}$

Supponiamo di avere di fronte a noi cinque oggetti e di volerli contare. Quando li contiamo, noi assegniamo loro i simboli numerici 1, 2, 3, 4, 5. Questi simboli numerici non sono i soli a nostra disposizione, ma fanno parte della successione di simboli 1, 2, 3, 4, 5, ..., che non ha un ultimo elemento. Possiamo quindi descrivere il nostro conteggio in questo modo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Un conteggio non è altro che l'utilizzo di una parte iniziale di un sistema di notazione numerica. Estendiamo ora questa idea a collezioni infinite di oggetti. Vogliamo in particolare descrivere un conteggio della collezione  $\mathbb{N}$ , comprendente i numeri interi positivi 1, 2, 3, ..., che possa essere portato a termine proprio come verrebbe portato a termine un conteggio di cinque elementi. **Introduciamo allora una nuova notazione numerica, che ci permetta di descrivere un conteggio completo degli oggetti in  $\mathbb{N}$  come la parte iniziale di una nuova successione di simboli.** Questo conteggio completo si conclude con il numero ① (*gross-one*, letto all'inglese), che:

1. segue tutti i numeri esprimibili nella notazione usuale. Ciò significa che  $\textcircled{1} > 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ;
2. si comporta, dal punto di vista del calcolo aritmetico, come i numeri esprimibili nella notazione usuale.

Un conteggio completo dei numeri interi positivi assume ora la forma:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & \textcircled{1}+1 & \textcircled{1}+2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1}. & & & \end{array}$$

La nuova notazione numerica ci permette di descrivere un ambiente esteso di cui la successione infinita  $1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}$  è una parte iniziale.

**Esercizio 53.**

- Facendo appello alla proprietà (1), verificare che  $\textcircled{1}-1 > 1, 2, 3, 4, \dots$  e che ciò vale anche per  $\textcircled{1}-2$ . Generalizzare questi risultati.
- Facendo appello alla proprietà (2), spiegare perché devono valere le seguenti disuguaglianze:  $\textcircled{1}-1 < \textcircled{1}$  e  $\textcircled{1} < \textcircled{1}+1$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare (i)  $\textcircled{1}-\textcircled{1}$  e (ii)  $4\textcircled{1}-\textcircled{1}-3\textcircled{1}+3$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare  $(\textcircled{1}+1)^2$ .

**Esercizio 54.**

- La proprietà (2) riguarda anche l'aritmetica con i numeri interi negativi e con le frazioni. Ad esempio:

$$\frac{\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{3} = -\frac{\textcircled{1}}{12}; \quad 3\frac{\textcircled{1}}{10} - \textcircled{1} = -\frac{7\textcircled{1}}{10}.$$

Calcolare:

$$(i) \frac{3\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{2}; \quad (ii) \frac{\textcircled{1}}{10}(2\textcircled{1}+1) - \frac{\textcircled{1}}{5}.$$

## 8.2 Contare suddivisioni di $\mathbb{N}$

Descriviamo  $\mathbb{N}$  come una successione mediante i nostri usuali simboli numerici. Tale successione ci si presenta nel modo seguente:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \dots$$

Riscriviamo ora la nostra successione su due colonne, procedendo dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

Otteniamo in questo modo una suddivisione di  $\mathbb{N}$  in due parti uguali, i numeri dispari e i numeri pari (la prima e la seconda riga qui sopra). Per ottenere una suddivisione più fine, in tre parti uguali, scriviamo la successione iniziale su tre colonne, procedendo ancora dall'alto in basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & \dots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \dots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & \dots \end{array}$$

Poichè vi sono  $\frac{1}{2}$  numeri in  $\mathbb{N}$ , la suddivisione in due parti uguali lo spezza in  $\frac{1}{2}$  numeri pari e  $\frac{1}{2}$  dispari. La suddivisione in tre parti uguali lo spezza in tre successioni di  $\frac{1}{3}$  numeri ciascuna.

### Esercizio 55.

a) Utilizzando  $\frac{1}{2}$ , noi possiamo descrivere  $\mathbb{N}$  in questo modo:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad \frac{1}{2} - 2 \quad \frac{1}{2} - 1 \quad \frac{1}{2}.$$

Dal momento che  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ,  $\frac{1}{2}$  è pari. Per la proprietà (2),  $\frac{1}{2} - 1$  dev'essere dispari e  $\frac{1}{2} - 2$  pari. Quindi, la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  è:

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad \dots \quad \frac{1}{2} - 4 \quad \frac{1}{2} - 2 \quad \frac{1}{2},$$

ma essa non può essere lunga quanto l'intera successione  $\mathbb{N}$ , che contiene il doppio dei suoi termini. Confrontare la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

b) Confrontare la successione dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ . Confrontare infine la successione dei multipli di 3 in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

c) Usando la notazione con  $\frac{1}{2}$ , descrivere la suddivisione di  $\mathbb{N}$  in quattro parti uguali. Di quanti numeri consta ciascuna parte della suddivisione?

### Esercizio 56.

a) Confrontare la successione che conta  $\mathbb{N}$  con la decima suddivisione di  $\mathbb{N}$  contenente 2.

b) Confrontare la successione che conta  $\mathbb{N}$  con la decima suddivisione di  $\mathbb{N}$  contenente 10.

### 8.3 Il paradosso di Ross

**Avvertenza:** *alcuni tra gli esercizi nella parte restante di questa scheda sono segnati da un asterisco. Questi esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico con ①. Gli altri esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico senza ①.*

Felix<sup>1</sup> ha una collezione di tante palline da ping pong quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ . Le palline sono contenute in una grande scatola e segnate dai simboli numerici  $1, 2, 3, \dots$ . Felix decide di togliere dalla scatola le palline dalla numero 1 alla numero 10 e poi di rimettere la numero 1 nella scatola. Subito dopo, Felix toglie le palline dalla 11 alla 20 e ripone la numero 2, che aveva precedentemente estratto, dentro la scatola. Poi Felix toglie le palline dalla 21 alla 30 e ripone la numero 3 nella scatola. Più tardi, Felix si incontra con i suoi amici Hermann ed Emmy, descrive loro la procedura effettuata e chiede se siano in grado di stabilire quante palline da ping pong siano rimaste fuori dalla scatola.

#### **Esercizio 57.**

- a) Descrivere il quarto ed il quinto stadio della procedura portata a termine da Felix. Descrivere il centesimo stadio. Descrivere uno stadio generico.
- b) Emmy ragiona così: ad ogni stadio, nove palline vengono estratte dalla scatola, quindi alla fine dovranno esserci infinite palline fuori dalla scatola. Ha ragione? Giustificare la risposta senza svolgere calcoli.
- c) Hermann ragiona così: ad ogni stadio, una pallina da ping pong viene rimessa nella scatola. Ci sono infiniti stadi e le palline sono rimesse nella scatola ordinatamente (prima la 1, poi la 2, poi la 3, e così via). Alla fine, tutte le palline da ping pong saranno di nuovo nella scatola. Ha ragione? Giustificare la risposta senza svolgere calcoli.

Paul, un altro amico di Felix, propone una terza soluzione. Paul considera i primi cento stadi della procedura eseguiti da Felix e immagina che ci siano tre scatole  $A, B$  e  $C$ . La scatola  $A$  è inizialmente piena e le scatole  $B, C$  sono vuote. Secondo Paul, la procedura di Felix è equivalente ad una procedura in cui, anzichè riporre una pallina in  $A$ , se ne estraggono dieci da  $A$  e se ne trasferiscono nove in  $B$  e una in  $C$ . Dopo cento iterazioni di questa proce-

<sup>1</sup>Questo problema è stato proposto da Littlewood in [14] e poi ripreso da Ross in [19].

dura, ci sono 90 palline in  $B$  e 10 in  $C$ . Dopo mille iterazioni, ci sono 900 palline in  $B$  e 100 in  $C$ . Se  $A$  è, alla fine, svuotato, il numero delle palline in  $B$  è nove volte quello delle palline in  $C$ . Ma si può rovesciare il contenuto di  $C$  in  $A$ , ottenendo lo stesso risultato della procedura di Felix. Quindi, al termine di quest'ultima procedura, devono esserci infinite palline sia in  $B$  che in  $A$ , ma in una proporzione fissata.

**Esercizio 58.** Discutere il ragionamento di Paul e stabilire se sia più adeguato o meno delle soluzioni offerte da Emmy e da Hermann.

Consideriamo ora il nostro problema svolgendo calcoli numerici.

**Esercizio 59.**

- a) \*Ad ogni stadio della procedura descritta da Felix vengono prese in considerazione 10 palline da ping pong. Quanti stadi comprende l'intera procedura? Perché devono essere meno di ①? Perché devono essere meno di ①/2?
- b) \*Quali palline da ping pong vengono prese in considerazione nel penultimo e nell'ultimo stadio?
- c) \*Quante palline da ping pong vengono rimesse nella scatola da Felix? Di conseguenza, quante ne restano fuori?

Dal momento che i suoi amici hanno trovato, dopo vari tentativi, una risposta al quesito di Felix, egli propone loro un nuovo problema. Felix ha infatti due scatole di palline da ping pong a casa, ciascuna contenente lo stesso numero di palline. Su una ha eseguito la procedura descritta sopra ma sull'altra ha seguito una procedura differente: ne ha inizialmente estratto le palline dalla 1 alla 9 e, con un pennarello, ha aggiunto uno zero alla numero 1, trasformandone l'etichetta numerica in 10. Poi Felix ha estratto dalla scatola le palline dalla 11 alla 19 e ha aggiunto uno zero alla pallina numero 2, trasformandone l'etichetta numerica in 20. In seguito, Felix ha estratto dalla scatola le palline dalla 21 alla 29 e ha rinominato la pallina numero 3, 30. Ha proseguito in questo modo fino all'esaurimento delle palline da ping pong. La sua domanda per Emmy, Hermann e Paul è: quante palline sono rimaste nella scatola, quante fuori, e che etichette numeriche

hanno le palline rimaste fuori?

**Esercizio 60.**

- a) \*Ci sono ①/9 stadi Quante palline vengono rinominate fra quelle estratte? Quante mantengono la stessa etichetta numerica?
- b) \*Quante palline rimangono nella scatola?
- c) \*In che cosa differiscono le due procedure seguite da Felix?

Il lettore che abbia già affrontato la scheda B può cimentarsi con le seguenti domande:

**Esercizio 61.**

- a) \*Come si possono programmare le procedure seguite da Felix in modo che possano essere portate a termine entro un minuto?
- b) \*Come si possono programmare in modo che vengano completate esattamente in un minuto?



## 9. Scheda E: decisioni infinite

### 9.1 Contare $\mathbb{N}$

Supponiamo di avere di fronte a noi cinque oggetti e di volerli contare. Quando li contiamo, noi assegniamo loro i simboli numerici 1, 2, 3, 4, 5. Questi simboli numerici non sono i soli a nostra disposizione, ma fanno parte della successione di simboli 1, 2, 3, 4, 5, ..., che non ha un ultimo elemento. Possiamo quindi descrivere il nostro conteggio in questo modo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Un conteggio non è altro che l'utilizzo di una parte iniziale di un sistema di notazione numerica. Estendiamo ora questa idea a collezioni infinite di oggetti. Vogliamo in particolare descrivere un conteggio della collezione  $\mathbb{N}$ , comprendente i numeri interi positivi 1, 2, 3, ..., che possa essere portato a termine proprio come verrebbe portato a termine un conteggio di cinque elementi. **Introduciamo allora una nuova notazione numerica, che ci permetta di descrivere un conteggio completo degli oggetti in  $\mathbb{N}$  come la parte iniziale di una nuova successione di simboli.** Questo conteggio completo si conclude con il numero ① (*gross-one*, letto all'inglese), che:

1. segue tutti i numeri esprimibili nella notazione usuale. Ciò significa che  $\textcircled{1} > 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ;
2. si comporta, dal punto di vista del calcolo aritmetico, come i numeri esprimibili nella notazione usuale.

Un conteggio completo dei numeri interi positivi assume ora la forma:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & \textcircled{1}+1 & \textcircled{1}+2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1}. & & & \end{array}$$

La nuova notazione numerica ci permette di descrivere un ambiente esteso di cui la successione infinita  $1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}$  è una parte iniziale.

### Esercizio 62.

- Facendo appello alla proprietà (1), verificare che  $\textcircled{1}-1 > 1, 2, 3, 4, \dots$  e che ciò vale anche per  $\textcircled{1}-2$ . Generalizzare questi risultati.
- Facendo appello alla proprietà (2), spiegare perché devono valere le seguenti disuguaglianze:  $\textcircled{1}-1 < \textcircled{1}$  e  $\textcircled{1} < \textcircled{1}+1$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare (i)  $\textcircled{1}-\textcircled{1}$  e (ii)  $4\textcircled{1}-\textcircled{1}-3\textcircled{1}+3$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare  $(\textcircled{1}+1)^2$ .

### Esercizio 63.

- La proprietà (2) riguarda anche l'aritmetica con i numeri interi negativi e con le frazioni. Ad esempio:

$$\frac{\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{3} = -\frac{\textcircled{1}}{12}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{1}} = \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}.$$

Calcolare:

$$(i) \frac{3\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{2}; (ii) \frac{1}{2^{\textcircled{1}}} + \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}$$

- Dal momento che  $\textcircled{1} > 1, 2, 3, 4, \dots$ , verificare che  $1/\textcircled{1} < 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ . Ciò significa che  $1/\textcircled{1}$  è un *infinitesimo positivo*. Verificare che anche  $2/\textcircled{1}$  e  $3/\textcircled{1}$  sono infinitesimi positivi.

## 9.2 Sommare le potenze di $1/2$

Consideriamo la somma delle prime quattro potenze successive di  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Possiamo calcolarne il valore numerico, ponendolo uguale a  $x$  e verificare che:

$$2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 + x - \frac{1}{16}.$$

Il valore della somma è quindi  $x = 1 - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$ .

**Esercizio 64.**

a) Ripetere il ragionamento appena effettuato e determinare la somma delle prime  $n$  potenze di  $1/2$ .

b) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

c) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**9.3 Contare suddivisioni di  $\mathbb{N}$**

Descriviamo  $\mathbb{N}$  come una successione mediante i nostri usuali simboli numerici. Tale successione ci si presenta nel modo seguente:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ \dots$$

Riscriviamo ora la nostra successione su due colonne, procedendo dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

Otteniamo in questo modo una suddivisione di  $\mathbb{N}$  in due parti uguali, i numeri dispari e i numeri pari (la prima e la seconda riga qui sopra). Per ottenere una suddivisione più fine, in tre parti uguali, scriviamo la successione iniziale su tre colonne, procedendo ancora dall'alto in basso e da sinistra verso destra, così:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & \dots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \dots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & \dots \end{array}$$

Poichè ci sono  $\textcircled{1}$  numeri in  $\mathbb{N}$ , la suddivisione in due parti uguali lo spezza in  $\textcircled{1}/2$  numeri pari e  $\textcircled{1}/2$  numeri dispari. La suddivisione in tre par-

ti uguali lo spezza in tre successioni, ciascuna delle quali contiene  $\frac{1}{3}$  numeri.

**Esercizio 65.**

a) Utilizzando  $\mathbb{1}$ , noi possiamo descrivere  $\mathbb{N}$  in questo modo:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \dots \ \mathbb{1} - 2 \ \mathbb{1} - 1 \ \mathbb{1}.$$

Dal momento che  $\frac{\mathbb{1}}{2} + \frac{\mathbb{1}}{2} = 1$ ,  $\mathbb{1}$  è pari. Per la proprietà (2),  $\mathbb{1} - 1$  dev'essere dispari e  $\mathbb{1} - 2$  pari. Quindi, la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  è:

$$2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ \dots \ \mathbb{1} - 4 \ \mathbb{1} - 2 \ \mathbb{1},$$

ma essa non può essere lunga quanto l'intera successione  $\mathbb{N}$ , che contiene il doppio dei suoi termini. Confrontare la successione dei numeri pari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

b) Confrontare la successione dei numeri dispari in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ . Confrontare infine la successione dei multipli di 3 in  $\mathbb{N}$  con la successione che conta  $\mathbb{N}$ .

c) Usando la notazione con  $\mathbb{1}$ , descrivere la suddivisione di  $\mathbb{N}$  in quattro parti uguali. Di quanti numeri consta ciascuna parte della suddivisione?

**Esercizio 66.** Confrontare la successione che conta  $\mathbb{N}$  con la decima suddivisione di  $\mathbb{N}$  contenente 2.

#### 9.4 Il paradosso di Machina

**Avvertenza:** alcuni tra gli esercizi nella parte restante di questa scheda sono segnati da un asterisco. Questi esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico con  $\mathbb{1}$ . Gli altri esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico senza  $\mathbb{1}$ .

Emmy possiede tante monete<sup>1</sup> da un Euro quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ . Le monete sono disposte in una cassetta dalla quale Emmy è in grado di prelevarle ordinatamente. Emmy propone al suo amico Felix di effettuare una successione infinita di decisioni secondo una regola da lei fissata. Alla  $n$ -esima decisione Felix può:

<sup>1</sup>Questo problema è stato originariamente formulato in [16], quale versione semplificata di un problema equivalente proposto in [5].

1. restituire tutte le monete in suo possesso fino a quel punto e ricevere le prime 10 monete;
2. restituire tutte le monete in suo possesso (eventualmente nessuna) e ricevere le monete che, nell'ordine in cui Emmy le considera, occupano i posti da  $10n + 1$  a  $10(n + 1)$  nella sua cassetta.

Possiamo supporre che Felix effettui la prima decisione dopo  $1/2$  minuti, la seconda dopo altri  $1/4$  minuti, la terza dopo altri  $1/8$  minuti e così via.

**Esercizio 67.**

- a) \*Qual è il numero di decisioni che Felix deve effettuare?
- b) \*Quanto tempo ha a disposizione Felix per effettuare le prime mille decisioni? Per effettuarle tutte?
- c) \*Qual è il numero di monete di cui Emmy è inizialmente in possesso?
- d) Sarebbe stato meglio per Felix selezionare sempre l'azione 2?
- e) \*Sarebbe stato meglio per Felix selezionare sempre l'azione 2?
- f) \*Se Felix alterna le due azioni, qual è il suo guadagno finale?

**Esercizio 68.** \*Se Felix sceglie l'azione 1 per prima e ad ogni scelta dell'azione 1 fa seguire esattamente due scelte dell'azione 2, quale azione sceglie per ultima? Qual è il suo guadagno finale? Se le monete fossero tutte numerate, quali simboli numerici recherebbero quelle da lui ottenute?

**Esercizio 69.** Individuare i presupposti del seguente ragionamento e valutarne la correttezza:

Se Felix sceglie costantemente l'azione 2, al termine delle sue decisioni non avrà guadagnato nemmeno un Euro. Infatti, se  $k$  è un numero intero positivo qualsiasi, deve trovarsi tra  $10n + 1$  e  $10(n + 1)$  per qualche valore di  $n \geq 0$ . Ma questo vuol dire che la  $k$ -esima moneta in possesso di Emmy, pur essendo ceduta a Felix dopo  $n$  decisioni, le sarà restituita alla decisione successiva. Ma questo vuol dire che ogni moneta deve prima o poi essere restituita ad Emmy.

### 9.5 Il paradosso di Yablo

Per ogni numero<sup>2</sup>  $n$  in  $\mathbb{N}$ , a  $1/2^n$  minuti dopo mezzogiorno, Emmy chiede a Felix di scegliere 1 oppure 0. Se la scelta di Felix rispetta la regola seguente, Felix vince una tavoletta di cioccolato. Felix deve scegliere 1 se ha sempre scelto 0 in precedenza e scegliere 0 altrimenti (vale a dire, se in precedenza ha scelto 1 almeno una volta).

**Esercizio 70.** Descrivere la sfida di Emmy nella versione in cui essa consta di dieci scelte soltanto. Calcolare in quanto tempo Felix opera tutte le sue scelte e quale strategia egli potrebbe adottare per vincere.

Consideriamo ora la sfida di Emmy nella sua versione infinita.

**Esercizio 71.** Supponiamo che, architettando la sua sfida, Emmy possa ragionare facendo appello soltanto alla notazione numerica usuale, senza ①. Emmy ragionerebbe in questo modo:

Se Felix scegliesse 1 ad uno stadio qualsiasi  $n$  del gioco, dovrebbe avere scelto 0 in ogni stadio precedente, cioè infinite altre volte. In questo caso, la sua ultima scelta di 0 seguirebbe una successione infinita di scelte di 0 e, per questo, violerebbe la mia regola, che richiede una precedente scelta di 1.

Che cosa dovrebbe concludere Emmy nell'ipotesi che Felix scelga 0 ad uno stadio qualsiasi del gioco? Che cosa dovrebbe concludere Emmy a proposito della possibilità che Felix riesca a rispettare la regola da lei proposta?

Per finire, dedichiamoci ad una analisi numerica del gioco proposto da

<sup>2</sup>Questo problema è stato originariamente proposto in [36] e riformulato nella forma qui presentata in [4].

Emmy a Felix.

**Esercizio 72.**

- a) \*Qual è il numero di scelte complessivo che Felix deve compiere?
- b) \*A che ora è stata compiuta la prima scelta?
- c) \*Quanto tempo viene impiegato per compiere tutte le scelte?
- d) \*Come si può criticare il ragionamento di Emmy descritto nell'Esercizio 71?
- e) \*Che strategia potrebbe adottare Felix per vincere la tavoletta di cioccolato?

**9.6 Una lotteria infinita**

Emmy propone a Felix una successione infinita di scommesse<sup>3</sup>, tante quante sono i numeri in  $\mathbb{N}$ . Queste scommesse si basano sull'estrazione di un biglietto numerato da un'urna nella quale sono contenuti tanti biglietti quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ . La scommessa numero  $n$  prevede che Emmy estragga un biglietto dall'urna e che paghi a Felix 2 Euro se il biglietto reca il numero  $n$  o che Emmy riceva da Felix  $1/2^n$  Euro se il biglietto reca un altro numero. Il biglietto estratto è rimesso nell'urna per l'eventuale estrazione successiva.

Per studiare questo problema, dobbiamo anzitutto descrivere l'estrazione di un biglietto dall'urna.

**Esercizio 73.**

- a) \*Qual è il numero di biglietti nell'urna?
- b) \*Se ci fossero 6 biglietti, la probabilità di estrarne uno in particolare sarebbe  $1/6$ . Qual è la probabilità di estrarre un biglietto nella lotteria di Emmy?
- c) \*Qual è la probabilità di estrarre un biglietto su cui non sia stampato il numero 3 nella lotteria di Emmy?
- d) \*Qual è la probabilità di estrarre un biglietto su cui non sia stampato alcuno dei numeri da 1 a 100 nella lotteria di Emmy?

Felix decide di accettare le scommesse di Emmy perchè gli sembrano tutte favorevoli. Infatti la scommessa  $n$  offre una probabilità vicina a 1 di vince-

<sup>3</sup>Questo problema è stato formulato in [2]

re una somma finita e comporta un rischio di perdita infinitamente piccolo. Per questo motivo, considerando ciascuna scommessa singolarmente, Felix si aspetta di ottenere un guadagno complessivo maggiore della perdita attesa. Per stabilire se abbia ragione, consideriamo anzitutto la totalità delle scommesse in cui Felix è coinvolto, senza studiarle una per una.

**Esercizio 74.**

- a) \*Calcolare, per la scommessa  $n$ , il prodotto tra la probabilità di perdere e la somma pagata ad Emmy. La somma di tutti questi prodotti è la *perdita attesa* di Felix. Calcolare il guadagno atteso.
- b) \*Calcolare, per la scommessa  $n$ , il prodotto tra la probabilità di vincere e la somma ricevuta da Emmy. La somma di tutti questi prodotti è il *guadagno atteso* di Felix. Calcolare il guadagno atteso.

A questo punto vediamo se il ragionamento iniziale di Felix è corretto, considerando se veramente ogni scommessa propostagli da Emmy sia vantaggiosa.

**Esercizio 75.**

- a) \*Considerare la scommessa numero  $(\textcircled{1}/2) - 1$ . Calcolare il guadagno atteso di Felix per questa scommessa (cioè il prodotto tra la probabilità di vincere e il denaro pagatogli da Emmy in caso di vittoria).
- b) \*Calcolare la perdita attesa di Felix per la medesima scommessa.
- c) \*Calcolare il rapporto tra perdita attesa e guadagno atteso supponendo che il guadagno atteso sia certo (abbia probabilità 1) e, sfruttando la disuguaglianza  $2^{\textcircled{1}} > 2\textcircled{1}$ , verificare che questo rapporto è maggiore di due.
- d) \*La conclusione dell'ultimo esercizio vale anche per le scommesse successive alla numero  $\frac{\textcircled{1}}{2} - 1$ . Perché? Che cosa se ne può concludere quanto al numero di scommesse favorevoli proposte da Emmy a Felix?

Nell'ultimo esercizio si è data per scontata la disuguaglianza  $2^{\textcircled{1}} > 2\textcircled{1}$ . Il



lettore interessato può verificarla nel seguente esercizio:

**Esercizio 76.**

- a) Consideriamo le successioni di 0 e 1 di una lunghezza fissata, note come *successioni binarie*. Se questa lunghezza è 2, ci sono  $4 = 2^2$  possibili successioni. Se è 3, ci sono  $8 = 2^3$  possibili successioni. Verificare queste asserzioni.
- b) \*Quante successioni binarie di lunghezza  $\frac{1}{2}$  ci sono?
- c) \*Descrivere  $2^{\frac{1}{2}}$  successioni binarie di lunghezza  $\frac{1}{2}$  e dimostrare che esistono altre successioni binarie non comprese fra quelle descritte.



## 10. Scheda F: paradossi fisici

### 10.1 Contare $\mathbb{N}$

Supponiamo di avere di fronte a noi cinque oggetti e di volerli contare. Quando li contiamo, noi assegniamo loro i simboli numerici 1, 2, 3, 4, 5. Questi simboli numerici non sono i soli a nostra disposizione, ma fanno parte della successione di simboli 1, 2, 3, 4, 5, ..., che non ha un ultimo elemento. Possiamo quindi descrivere il nostro conteggio in questo modo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Un conteggio non è altro che l'utilizzo di una parte iniziale di un sistema di notazione numerica. Estendiamo ora questa idea a collezioni infinite di oggetti. Vogliamo in particolare descrivere un conteggio della collezione  $\mathbb{N}$ , comprendente i numeri interi positivi 1, 2, 3, ..., che possa essere portato a termine proprio come verrebbe portato a termine un conteggio di cinque elementi. **Introduciamo allora una nuova notazione numerica, che ci permetta di descrivere un conteggio completo degli oggetti in  $\mathbb{N}$  come la parte iniziale di una nuova successione di simboli.** Questo conteggio completo si conclude con il numero ① (*gross-one*, letto all'inglese), che:

1. segue tutti i numeri esprimibili nella notazione usuale. Ciò significa che  $\textcircled{1} > 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ;
2. si comporta, dal punto di vista del calcolo aritmetico, come i numeri esprimibili nella notazione usuale.

Un conteggio completo dei numeri interi positivi assume ora la forma:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & \textcircled{1}+1 & \textcircled{1}+2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \textcircled{1}-2 & \textcircled{1}-1 & \textcircled{1} & & & \end{array}$$

La nuova notazione numerica ci permette di descrivere un ambiente esteso di cui la successione infinita  $1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}$  è una parte iniziale.

### Esercizio 77.

- Facendo appello alla proprietà (1), verificare che  $\textcircled{1}-1 > 1, 2, 3, 4, \dots$  e che ciò vale anche per  $\textcircled{1}-2$ . Generalizzare questi risultati.
- Facendo appello alla proprietà (2), spiegare perché devono valere le seguenti disuguaglianze:  $\textcircled{1}-1 < \textcircled{1}$  e  $\textcircled{1} < \textcircled{1}+1$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare (i)  $\textcircled{1}-\textcircled{1}$  e (ii)  $4\textcircled{1}-\textcircled{1}-3\textcircled{1}+3$ .
- Facendo appello alla proprietà (2), calcolare  $(\textcircled{1}+1)^2$ .

### Esercizio 78.

- La proprietà (2) riguarda anche l'aritmetica con i numeri interi negativi e con le frazioni. Ad esempio:

$$\frac{\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{3} = -\frac{\textcircled{1}}{12}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{1}} = \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}.$$

Calcolare:

$$(i) \frac{3\textcircled{1}}{4} - \frac{\textcircled{1}}{2}; (ii) \frac{1}{2^{\textcircled{1}}} + \frac{1}{2^{\textcircled{1}}}$$

## 10.2 Sommare le potenze di $1/2$

Consideriamo la somma delle prime quattro potenze successive di  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Possiamo calcolarne il valore numerico, ponendolo uguale a  $x$  e verificare che:

$$2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 + x - \frac{1}{16}.$$

Il valore della somma è quindi  $x = 1 - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$ .

**Esercizio 79.**

a) Ripetere il ragionamento appena effettuato e determinare la somma delle prime  $n$  potenze di  $1/2$ .

b) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

c) Calcolare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

### 10.3 Energia cinetica

**Avvertenza:** alcuni tra gli esercizi nella parte restante di questa scheda sono segnati da un asterisco. Questi esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico con ①. Gli altri esercizi vanno affrontati facendo uso del calcolo numerico senza ①.

Consideriamo una guida lunga un metro<sup>1</sup>, i cui estremi siano segnati dalle etichette numeriche 0 e 1 e lungo la quale siano collocati tanti punti materiali quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ , tutti dotati della medesima massa  $m$ . Chiamiamo questi punti materiali  $P_1, P_2, P_3, \dots$  e le loro posizioni lungo la guida  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , dove la posizione di  $P_n$  è  $X_n$ , a  $1/2^n$  metri dal punto segnato con 0. Supponiamo che, partendo dal punto segnato con 1, il punto materiale  $P_0$  di massa  $m$  si muova alla velocità costante  $v$  in direzione di  $P_1$  e che dia inizio ad una serie di urti anelastici. Dopo il primo di questi urti,  $P_0$  sarà in quiete a  $1/2$  metri da 1, mentre  $P_1$  è in procinto di collidere in urto anelastico con  $P_2$  alla velocità  $v$ , dopo il quale finirà in quiete nella posizione originariamente occupata da  $P_2$ . Lo stesso tipo di interazione andrà quindi ripetersi in  $P_3, P_4, \dots$ . Supponiamo inoltre che gli urti siano programmati in modo tale che il primo, tra  $P_0$  e  $P_1$ , avvenga dopo  $1/2$  minuti,

<sup>1</sup>Questo problema è discusso in [11] e [12].

il secondo dopo altri  $1/4$  minuti, il terzo dopo altri  $1/8$  minuti, e così via.

**Esercizio 80.** Considerare il seguente argomento e valutarne la correttezza:

Quando  $P_0$  è messo in moto, l'energia cinetica totale del sistema di particelle è  $(1/2)mv^2$ . Dopo che  $P_0$  collide con  $P_1$ , si ferma e rimane in quiete, ma  $P_1$  è in moto e l'energia cinetica totale rimane costante. Tuttavia, dopo un minuto, tutti gli urti hanno avuto luogo. Ma ogni particella, dopo l'urto con la successiva, rimane in quiete. Quindi, dopo un minuto l'energia cinetica del sistema si è dissipata e tutte le particelle sono in quiete.

**Esercizio 81.** Spiegare la seguente osservazione alla luce del precedente esercizio:

Poichè, in questo caso, le leggi fisiche considerate non dipendono dalla direzione del tempo, la stessa successione infinita di urti anelastici potrebbe avvenire nell'ordine inverso a quello descritto. In questo caso avremmo dimostrato che, in teoria, un sistema fisico infinito in quiete può mettersi in moto da solo.

A questo punto possiamo effettuare considerazioni di carattere numerico.

**Esercizio 82.**

- a) \*Specificare il numero dei punti materiali sulla guida.
- b) \*Quanto tempo ci vuole perchè tutti gli urti abbiano luogo?
- c) \*C'è un modo di programmare gli urti affinchè si verifichino tutti esattamente nell'arco di un minuto e non prima?
- d) \*In che posizione è collocato il  $(\textcircled{1} - 1)$ -esimo punto materiale. A quali urti partecipa e quando?
- e) \*Determinare lo stato del sistema dopo che tutti gli urti anelastici hanno avuto luogo.

## 10.4 Creazione dal nulla

Consideriamo una guida lunga un metro<sup>2</sup> i cui estremi siano segnati dalle etichette numeriche 0 e 1. Inoltre, tante posizioni quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$  sono indicate sulla guida: in particolare, la posizione  $X_n$  è ad una distanza di  $1/2^n$  metri dall'estremo segnato con 0. In particolare, la nostra regola definisce l'inserzione di un punto materiale sulla guida, sulla base della rilevazione o meno di un punto materiale in posizione  $X_n$  all'istante  $T_n$ , occorrente  $1/2^n$  minuti dopo un istante iniziale fissato  $T_0$ . Il punto materiale eventualmente inserito è  $P_n$ , tratto da una scorta infinita di punti materiali, tanti quanti sono i numeri in  $\mathbb{N}$ . Le regole di inserzione sono specificate sulla base di tre possibili eventualità:

1. Un punto materiale è rilevato in posizione  $X_n$  all'istante  $T_n$  e si muove alla velocità costante di 1m/s da 0 verso 1.
2. Un punto materiale è rilevato in posizione  $X_n$  all'istante  $T_n$ , si muove da 0 verso 1, ma non a velocità costante;
3. Nessun punto materiale è rilevato in posizione  $X_n$  all'istante  $T_n$ .

Date queste eventualità, introduciamo la seguente regola:

1. Nel caso 1, nulla accade ed il punto materiale rilevato continua a muoversi di moto rettilineo uniforme.
2. Nel caso 2, il punto materiale rilevato viene annichilito dopo  $1/2^{n+1}$  minuti, ed un punto materiale  $P_n$ , che si muove di moto rettilineo uniforme a velocità 1m/s, è inserito in posizione  $X_n + 1/2^{n+1}$  metri.
3. Nel caso 3 si opera come nel caso 2, ma senza annichilire alcun punto materiale, poichè nessuno viene rilevato.

---

<sup>2</sup>Questo problema è stato originariamente presentato in [13].

**Esercizio 83.**

- a) Costruire un'argomentazione per dimostrare che, se l'inserimento di  $P_n$  fosse stato effettuato, nessun inserimento di  $P_{n+1}$  potrebbe essere stato effettuato.
- b) Utilizzare questa argomentazione per concludere che nessun inserimento di un punto materiale può essere effettuato.
- c) Dedurre che, se nessun inserimento può essere effettuato, allora dev'esserci un punto materiale  $Q$  che si muove di moto rettilineo uniforme da 0 verso 1.
- d) Il punto materiale  $Q$  non può essere alcuno dei punti materiali  $P_n$ . Perché? Concludere che  $Q$  viene creato dal nulla.

Dopo avere considerato il problema senza fare appello al calcolo numerico con ①, possiamo studiare come cambi il suo trattamento quando ne facciamo uso.

**Esercizio 84.**

- a) \*Qual è il numero di posizioni su cui si devono effettuare rilevazioni per verificare la presenza o meno di un punto materiale?
- b) In che posizione e a quale istante si pone il problema di effettuare la prima rilevazione?
- c) \*Come si opera in seguito a questa rilevazione e che effetto ha l'operazione effettuata sulle rilevazioni successive?
- d) \*Chiarire in che modo si possano identificare lacune all'interno delle argomentazioni proposte nell'esercizio 83.



## Bibliografia

- [1] Amodio, P., F. Iavernaro, F. Mazzia, M. S. Mukhametzhanov e Ya. D. Sergeyev. (2017) 'A generalized Taylor method of order three for the solution of initial value problems in standard and infinity floating-point arithmetic', *Mathematics and Computers in Simulation*, 141, 24–39.
- [2] Arntzenius, F., A. Elga e J. Hawthorne (2004) 'Bayesianism, Infinite Decisions, and Binding' *Mind*, 113, 251–281
- [3] Arsenijevic, M. (1989) 'How many physically distinguished parts can a limited body contain?', *Analysis*, 49, 36-42
- [4] Bacon, A. (2010) 'A paradox for supertask decision makers', *Philosophical Studies*, 153, 307-311
- [5] Barrett, J.F. e F. Arntzenius (1999) 'An infinite decision puzzle', *Theory and Decision*, 46, 101-103
- [6] D'Alotto, L. (2013) 'A classification of two-dimensional cellular automata using infinite computations', *Indian Journal of Mathematics*, 55, 143–158
- [7] D'Alotto, L. (2015) 'A classification of one-dimensional cellular automata using infinite computations', *Applied Mathematics and Computation*, 255, 15–24

- [8] De Leone, R. (2018) ‘Nonlinear programming and grossone: Quadratic programming and the role of constraint qualifications’, *Applied Mathematics and Computation*, 318, 290–297.
- [9] De Leone, R., G. Fasano e Ya. D. Sergeyev (2018) ‘Planar methods and grossone for the conjugate gradient breakdown in nonlinear programming’, *Computational Optimization and Applications*, 71, 73–93.
- [10] Iannone, P., D. Rizza e A. Thoma (2018) ‘Investigating secondary school students’ epistemologies through a class activity concerning infinity’, in E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, and L. Sumpter (eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)*. Umeå, Sweden: PME, pp.131–138.
- [11] Laraudogoitia, J.P. (1996) ‘A beautiful supertask’, *Mind*, 105, 81-83
- [12] Laraudogoitia, J.P. (2005) ‘Action without interaction’, *Analysis*, 65, 140-143
- [13] Laraudogoitia, J.P. (2009) ‘Physical action without interaction’, *Erkenntnis*, 70, 365-377
- [14] Littlewood, J.E. (1986) *Littlewood’s Miscellany*, B. Bollobás (ed.), Cambridge: Cambridge University Press
- [15] Lolli, G. (2015) ‘Metamathematical investigations on the theory of grossone’, *Applied Mathematics and Computation*, 255, 3–14.
- [16] Machina, M.J. (2000) ‘Barrett and Arntzenius’s infinite decision puzzle’, *Theory and Decision*, 49, 293-297
- [17] Mazzia, F., Ya. D. Sergeyev, F. Iavernaro, P. Amodio e M. S. Mukhametzhyanov (2016), ‘Numerical methods for solving odes on the infinity computer’, *AIP Conference Proceedings*, 1776, 090033.
- [18] Montagna, F., G. Simi and A. Sorbi (2015), ‘Taking the Pirahã seriously’, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 21, 52–69
- [19] Ross, S. (1988) *A first course on probability*, New York: MacMillan
- [20] Rizza, D. (2015) ‘A simple solution to Ross’ Paradox’, downloadable from <https://eastanglia.academia.edu/DavideRizza>

- [21] Rizza, D. (2016) ‘Supertasks and numeral systems’, *American Institute of Physics Conference Proceedings*, 1776, 090005.
- [22] Rizza, D. (2018a) ‘How to make an infinite decision’ [abstract only], *Bulletin of Symbolic Logic* 24, p.227.
- [23] Rizza, D. (2018b) ‘A study of mathematical determination through Bertrand’s paradox’, *Philosophia Mathematica* 26, pp.375–395.
- [24] Rizza, D. 2019. ‘Numerical methods for infinite decision-making processes’ *International Journal of Unconventional Computing* 14, pp.139-158.
- [25] Sergeyev, Ya. D. (2003) *The Arithmetic of Infinity*, Rende: Edizioni Orizzonti Meridionali
- [26] Sergeyev, Ya. D. (2008) ‘A new applied approach for executing computations with infinite and infinitesimal quantities’, *Informatica*, 19, 567-596
- [27] Sergeyev, Ya. D. (2009) ‘Numerical point of view on Calculus for functions assuming finite, infinite, and infinitesimal values over finite, infinite, and infinitesimal domains’, *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications*, 1(12), e1688-e1707
- [28] Sergeyev, Ya. D. (2010) ‘Lagrange Lecture: Methodology of numerical computations with infinities and infinitesimals’, *Rendiconti del Seminario Matematico dell’Università e del Politecnico di Torino*, 68, 95-113
- [29] Sergeyev, Ya. D. e Alfredo Garro (2010) ‘Observability of Turing machines: a refinement of the theory of computation’, *Informatica*, 21, 425–454
- [30] Sergeyev, Ya. D. (2011) ‘On accuracy of mathematical languages used to deal with the Riemann zeta function and the Dirichlet eta function’, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 3, 129–148.
- [31] Sergeyev, Ya. D. e Alfredo Garro (2015) ‘The grossone methodology perspective on Turing machines’. In A. Adamatzky (editor) *Automata, Universality, Computation*, vol. 12 of *Emergence, Complexity and Computation*, Springer, pp 139–169

- [32] Sergeyev, Ya.D., M. S. Mukhametzhanov, F. Mazzia, F. Iavernaro, e P. Amodio (2016) ‘Numerical methods for solving initial value problems on the infinity computer’ *International Journal of Unconventional Computing*, 12, 3–23
- [33] Sergeyev, Ya. D. (2017) ‘Numerical infinities and infinitesimals: Methodology, applications, and repercussions on two Hilbert problems’, *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, 4, 219–320
- [34] Sergeyev, Ya. D. (2018) ‘ Numerical infinities applied for studying Riemann series theorem and Ramanujan summation’, *AIP Conference Proceedings* 1978, 020004.
- [35] Thomson, J. (1954) ‘Tasks and super-tasks’, *Analysis*, 15, 1-13
- [36] Yablo, S. (2000) ‘A reply to new Zeno’, *Analysis*, 60, 148-151
- [37] Zhigljavsky, A. (2012) ‘Computing sums of conditionally convergent and divergent series using the concept of grossone’, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 8064–8076